

# Danmarks Tekniske Universitet

Side 1 af 5 sider

Skriftlig eksamen, d. 23. maj 2024

Kursusnavn: Matematik 1a (Polyteknisk grundlag)

Kursusnr. 01001\01003

Eksamensvarighed: 2 timer

Hjælpemidler: Ingen elektroniske hjælpemidler

“Vægtning”: Alle spørgsmål i denne eksamen vægtes ens. Denne del af eksamenen tæller 50% af hele eksamenen.

**Yderligere information:** Spørgsmålene er stillet først på dansk og dernæst på engelsk. Alle svar skal være motiverede, og mellemregninger skal angives i passende omfang.

---

# The Technical University of Denmark

Page 1 of 5 pages

Written exam, the 23rd of May 2024

Course name: Mathematics 1a (Polytechnical foundation)

Course no. 01001\01003

Exam duration: 2 hours

Aid: No electronic aid

“Weighting”: All questions in this exam are weighted equally. This part of the exam counts for 50% of the whole exam.

**Additional information:** The questions are posed first in Danish and then in English. All answers have to be motivated and intermediate steps need to be given to a reasonable extent.

---

### Opgave 1

- Beregn sandhedstabellen for følgende logiske udsagn:  $(P \Leftrightarrow R) \vee Q$ .
- Er følgende logiske udsagn  $(\neg P \wedge Q) \Rightarrow (P \vee Q)$  en tautologi?

### Opgave 2

Givet den binome ligning  $z^4 = -4$ , angiv den løsning som ligger i første kvadrant i den komplekse talplan. Løsningen skal gives på rektangulær form.

### Opgave 3

For alle  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$  defineres

$$t_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)k}.$$

Besvar nu følgende spørgsmål:

- Beregn  $t_2$  og  $t_3$ .
- Vis med induktion efter  $n$  at  $t_n = \frac{n-1}{n}$  for alle  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ .

### Opgave 4

Der gives følgende vektorer i  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

- Lad  $W$  være underrummet af det reelle vektorrum  $\mathbb{R}^3$  udspændt af vektorerne  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  og  $\mathbf{v}_3$ . Find en basis for underrummet  $W$ .
- Angiv en vektor i  $\mathbb{R}^3$  som ikke er i  $W$ . Gør rede for dit svar.

---

**Opgave 5**

Lad  $V = \mathbb{R}^3$ . Der vælges følgende ordnede basis for  $V$ :

$$\gamma = \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

For en lineær afbildning  $L : V \rightarrow V$  oplyses følgende afbildningsmatrix:

$${}_{\gamma}[L]_{\gamma} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Beregn afbildningsmatricen  ${}_{\mathbf{e}}[L]_{\mathbf{e}}$ , hvor  $\mathbf{e}$  betegnes den standard ordnede basis for  $\mathbb{R}^3$ .

**Opgave 6**

Givet følgende andenordens differentiaalligning:

$$f''(t) - 6f'(t) + 9f(t) = 4e^t.$$

- Er den givne differentiaalligning homogen eller inhomogen?
- Det oplyses at  $f(t) = e^t$  er løsning til den givne differentiaalligning. Beregn differentiaalligningens fuldstændige reelle løsning.

EKSAMEN SLUT

---

**Question 1**

- Determine the truth table of the following logical proposition:  $(P \Leftrightarrow R) \vee Q$ .
- Is the logical proposition  $(\neg P \wedge Q) \Rightarrow (P \vee Q)$  a tautology?

**Question 2**

Given is the binomial equation  $z^4 = -4$ . Compute the solution to this equation that lies in the first quadrant of the complex plane. The solution should be given in rectangular form.

**Question 3**

For all  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$  one defines

$$t_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)k}.$$

Now answer the following questions:

- Compute  $t_2$  and  $t_3$ .
- Show using induction on  $n$  that  $t_n = \frac{n-1}{n}$  for all  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ .

**Question 4**

The following vectors in  $\mathbb{R}^3$  are given:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

- Let  $W$  be the subspace of the real vector space  $\mathbb{R}^3$  spanned by the vectors  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  and  $\mathbf{v}_3$ . Find a basis for the subspace  $W$ .
- Give a vector in  $\mathbb{R}^3$  that does not lie in  $W$ . Motivate your answer.

---

**Question 5**

Let  $V = \mathbb{R}^3$ . The following ordered basis for  $V$  is chosen:

$$\gamma = \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

For a linear map  $L : V \rightarrow V$  the following mapping matrix is given:

$${}_{\gamma}[L]_{\gamma} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Compute the mapping matrix  ${}_e[L]_e$ , where  $\mathbf{e}$  denotes the standard ordered basis for  $\mathbb{R}^3$ .

**Question 6**

The following second order differential equation is given:

$$f''(t) - 6f'(t) + 9f(t) = 4e^t.$$

- Is the given differential equation homogeneous or inhomogeneous?
- It is given that  $f(t) = e^t$  is a solution to the given differential equation. Determine the general real solution of the differential equation.

END OF THE EXAM