Tema-øvelse 1.

Målet med denne tema-øvelse er at opnå en bedre forståelse af geometrien i den komplekse talplan. Især vil vi studere en bestemt type funktioner fra $\mathbb{C}$ til $\mathbb{C}$ kaldet affine transformationer. Du vil også lære at udføre simple beregninger med komplekse tal i commandoline-versionen af Python.

Del I: arbejde med komplekse tal i commandline-versionen af Python

Først, åbn en commandline-version af Python. Arbejdet med komplekse tal i commandline-versionen af Python kan gøres ved hjælp af pakken kaldet "cmath". Lad os derfor først importere "cmath"ved at skrive følgende i Pythons commandoprompt:

```
import cmath
```

Som et eksempel, lad os definere det komplekse tal $2 + 3i$.

```
z = complex(2,3)
```

Det er nemt at få udskrevet det komplekse tal z:

```
z
```

Bemærk, at z vises af Python som $2 + 3j$. Derfor foretrækker Python at bruge j frem for i. Bogstavet j er blot notation, og man kan for eksempel ikke skrive `j*j`. Prøv at se, hvad der sker! Den reelle og imaginære del af et komplekst tal z kan fås som følger:

```
z.real
z.imag
```

De rektangulære koordinater for et komplekst tal kan derfor fås ved at udføre kommandoen:

```
(z.real,z.imag)
```

Bemærk, at Python arbejder numerisk. Grunden er at i en hel del matematiske problemstillinger, kan man ikke beregne et eksakt svar, og at en numeriske tilnærmelse af det egentlige svar er det bedste man kan få der. Pythons designere har simpelthen valgt en numerisk tilgang i commandline-versionen af Python. Dette forklarer, hvorfor Python ofte returnerer et svar som et decimaltal, selvom vi ikke brugte decimaltal, da vi definerede det komplekse tal z. At Python arbejder numerisk, forklarer også det overraskende svar, Python gav i Opgave 1b fra Lille Dag i Uge 3 af kurset.

Vi kan beregne $-z$ og z^{-1} som følger:

```
-z
1/z
```

Bemærk igen, at Python beregner z^{-1} numerisk. Vis, at den eksakte værdi af svaret er $z^{-1} = (2/13) - (3/13)i$. Som et alternativ til `1/z` kan man også skrive `z**(-1)`

Vi definerer et andet komplekst tal $4 + 5i$.

```
w = complex(4,5)
```

Multiplikation af komplekse tal udføres som sædvanligt med en stjern. Kontroller i hånden, at følgende output er korrekt:

```
z*w
```

Endelig kan de polære koordinater for et komplekst tal z fås som følger.

```
cmath.polar(z)
```

Her angiver som sædvanlig den første koordinat modulus $|z|$ af z, mens den anden koordinat giver hovedargumentet (hovedværdien af argumentet) $\operatorname{Arg}(z)$ af z (hvis du har glemt, hvad hovedværdien af argumentet er, så tjek bare Kapitel 3, Afsnit 3 i lærebogen). Husk, at Python bruger nulindeksering, så modulus af z kan derfor fås ved at skrive:

```
cmath.polar(z)[0]
```

Ligeledes kan hovedargumentet for z beregnes ved at udføre kommandoen:

```
cmath.polar(z)[1]
```

Givet tallet $1 + i$, kontroller ved hjælp af håndregning at Python giver de korrekte værdier af $|1 + i|$ og $\operatorname{Arg}(1 + i)$ fra et numerisk synspunkt.

Endelig, givet de polære koordinater for et komplekst tal, lad os sige, at man er givet parret (a, b), kan man beregne den rektangulære form af dette komplekse tal ved at skrive `cmath.rect(a,b)`. For eksempel, kontroller at følgende bør returnere det komplekse tal $1+i$ (med en lille numerisk fejlmargin):

```
cmath.rect(1.4142135623730951, 0.7853981633974483)
```

Del II: binome ligninger

Betragt polynomiet $Z^4 - w$, hvor $w = 8 - i8\sqrt{3}$. Vi vil beregne rødderne af dette polynomium. Bemærk, at dette polynomium ligner meget det, der blev studeret i Eksempel 4.4.1 fra kursusmaterialet. Brug gerne eksemplet hvis du nedenfor støder på problemer i forbindelse med håndregningerne.

1. Beregn i hånden rødderne af det binome polynom $Z^4 - w$, hvor som før $w = 8 - i8\sqrt{3}$. Skriv rødderne både i rektangulær og polær form.

2. Visualisér de fire rødder ved at indtegne dem i den komplekse talplan (lav en skitse på papir). Hvis alt gik godt, danner disse fire rødder hjørnerne af et kvadrat med centrum i 0 i den komplekse talplan.

3. I Python definieres det komplekse tal $w = 8 - i8\sqrt{3}$ som følger:

```
w = complex(8,-8*3**(1/2))
```

Hvad er outputtet af Python-kommandoen `w**(1/4)`? For fremtidig gemmer vi resultatet i variablen v ved at udføre kommandoen

```
v=w**(1/4)
```

Hvilken af de fire rødder af $Z^4 - w$, som du beregnede i hånden før, svarer v til?

4. Vis i hånden, at $e^{i2\pi/4} = i$. I Python kan e^z for $z \in \mathbb{C}$ beregnes med kommandoen `cmath.exp(z)`. Brug følgende tilnærmede værdi for π: $\pi \approx 3.14159$ og beregn $e^{i2\pi/4}$ som følger:

```
cmath.exp(complex(0,2*3.14159/4))
```

Bemærk, at da Python arbejder numerisk, er resultatet en værdi meget tæt på i, men ikke nødvendigvist i selv.

5. Kontroller med Python, at de fire komplekse tal $v, v \cdot i, v \cdot i^2$ og $v \cdot i^3$ alle er rødder i polynomiet $Z^4 - w$ (faktisk kan Theorem 4.4.1 fra lærebogen også bruges til at vise dette, men her bliver du bedt om at kontrollere dette ved hjælp af Python). Mere præcist, vis at når du beregner værdien af $z^4 - w$ for disse fire komplekse tal, er resultatet et tal meget tæt på nul (det eksakte resultat er nul, men Python regner numerisk).

6. Brug figuren af de fire rødder af $Z^4 - w$, som du lavede før og indtegn nu de komplekse tal $v \cdot i, v \cdot i^2$ og $v \cdot i^3$ i den komplekse talplan. Hvad er effekten af at multiplicere en rod med i i geometriske termer?

7. Antag, at du får at vide, at en binom ligning har formen $z^5 = a$ for $a \in \mathbb{C}$ og at $z = -2$ er en af dens løsninger. Brug Python til at finde de resterende løsninger numerisk. Hint: beregn først $e^{i2\pi/5}$ i Python.

Del III: Geometrisk effekt af kompleks multiplikation

1. (a) Betragt funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ defineret ved $z \mapsto i \cdot z$. Indtegn på en skitse de komplekse tal 2, $1 + i$ og $-2 + 3i$ i den komplekse talplan. Brug nu Python til at beregne $f(2)$, $f(1+i)$, $f(-2+3i)$ og indtegn resultaterne i samme figur. Konkluder, at for disse tal er effekten af at tage funktionsværdien, at et komplekst tal z roteres med en vinkel på $\pi/2$ mod uret (midtpunktet for rotationen er origo i den komplekse talplan).

   (b) Ved at bruge, at $z = |z|e^{i\arg(z)}$, vis at $f(z) = |z|e^{i(\arg(z)+\pi/2)}$. Dette forklarer, hvorfor f har effekten af en rotation med en vinkel på $\pi/2$ mod uret. Hint: du kan bruge ligningen $e^{i2\pi/4} = i$, som du allerede viste i Del II af denne tema-øvelse.

   (c) Mere generelt, hvis $\alpha \in \mathbb{R}$, kan man definere funktionen $f_\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ved $z \mapsto e^{i\alpha} \cdot z$. Vis, at $f_\alpha(z) = |z|e^{i(\arg(z)+\alpha)}$ og konkluder, at måden funktionen f_α virker på den komplekse talplan er en rotation med en vinkel på α mod uret (som før er midtpunktet for rotationen origo i den komplekse talplan).

(d) Brug Python til at finde $\alpha \in \mathbb{R}$ (numerisk) således at $f_\alpha(\sqrt{2}/2+i\sqrt{2}/2) = 1/2+i\sqrt{3}/2$. Hint: beregn først argumenterne for $\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$ og $1/2 + i\sqrt{3}/2$.

(e) Vis, at der ikke eksisterer et $\alpha \in \mathbb{R}$ således at $f_\alpha(1 + i) = 2 + 3i$. Hint: beregn først modulus af $1 + i$ og $2 + 3i$.

2. (a) Betragt funktionen $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ defineret ved $z \mapsto (1 + i) \cdot z$. Indtegn på en skitse de komplekse tal 2, $1+i$ og $-2+i$ i den komplekse talplan. Brug nu Python til at beregne $g(2)$, $g(1+i)$, $g(-2+i)$ og indtegn resultaterne i samme figur. Kontroller med Python, at for disse tal bliver effekten af at tage funktionsværdien af tallet dobbelt: for det første, bliver længden (det vil sige, modulus) ganget med en faktor $\sqrt{2} \approx 1.4142$, og for det andet, bliver der roteret med en vinkel på $\pi/4$ mod uret (midtpunktet for rotationen er origo i den komplekse talplan).

   (b) Vis, at $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ og brug dette til at vise, at $g(z) = \sqrt{2}|z|e^{i(\arg(z)+\pi/4)}$. Konkluder, at effekten af g på ethvert komplekst tal z er, at længden af z bliver forøget med en faktor $\sqrt{2} \approx 1.4142$, mens der også roteres med en vinkel på $\pi/4$ mod uret.

   (c) Mere generelt, for $a \in \mathbb{C}$, kan man definere funktionen $g_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ved $z \mapsto a \cdot z$. Vis, at $g_a(z) = |a| \cdot |z|e^{i(\arg(z)+\arg(a))}$ og konkluder, at måden funktionen g_a virker på det komplekse tal er ved at øge længden af tallet med en faktor $|a|$ samt rotere tallet med en vinkel på $\arg(a)$ mod uret (som før er midtpunktet for rotationen origo i den komplekse talplan).

   Pointen med denne del er, at multiplikation af et komplekst tal med $a \in \mathbb{C}$ har en smuk geometrisk fortolkning i den komplekse talplan: man skalerer med en faktor $|a|$ og roterer mod uret med en vinkel på $\arg(a)$.

Del IV: Geometrisk effekt af kompleks addition kombineret med multiplikation

1. For $b \in \mathbb{C}$, lad os betragte funktionen $h_b : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ defineret ved $z \mapsto z + b$. Hvad er effekten af denne funktion på et komplekst tal? Svar: en translation langs vektoren $(\mathrm{re}(b), \mathrm{im}(b))$.

2. Som før, bruger vi notation g_a for funktionen med definitionsmængde og dispositionsmængde $\mathbb{C}$ defineret ved $g_a(z) = a \cdot z$. Vis, at $(h_b \circ g_a)(z) = a \cdot z + b$.

3. Konkluder, at funktionen $p_{a,b} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ defineret ved $z \mapsto az + b$, har en effekt på den komplekse talplan, der kan beskrives geometrisk som følger:

   (i) Først skaleres den komplekse tal med en faktor $|a|$ og roteres tallet mod uret med en vinkel på $\arg(a)$.

   (ii) Derefter, translateres det komplekse tal langs vektoren $(\mathrm{Re}(b), \mathrm{Im}(b))$.

4. Vælg $a = 1 + i$ og $b = 2 + 3i$. Brug nu Python til at beregne $p_{a,b}(z)$ for alle z i mængden $\{1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2\}$. Indtegn på en skitse resultaterne i den komplekse talplan. Hvad observeres? Svar: værdierne for z ligger alle på et linjestykke fra 1 til 2, og funktionsværdierne ligger også på et linjestykke.

5. Find $a, b \in \mathbb{C}$ således at linjestykket $L_1 = \{t \mid 0 \leq t \leq 1\}$ bliver afbildet af funktionen $p_{a,b}$ til linjestykket $L_2 = \{2 + it \mid 0 \leq t \leq 2\}$.