Danmarks Tekniske Universitet

Skriftlig eksamen, d. 5. december 2023

Kursusnavn: Matematik 1a (Polyteknisk grundlag) Kursusnr. 01001\01003
Eksamensvarighed: 2 timer

Hjælpemidler: Ingen elektroniske hjælpemidler

"Vægtning": Alle spørgsmål i denne eksamen vægtes ens. Denne del af eksamenen tæller 50% af hele eksamenen.

Yderligere information: Spørgsmålene er stillet først på dansk og dernæst på engelsk. Alle svar skal være motiverede, og mellemregninger skal angives i passende omfang.

The Technical University of Denmark

Written exam, the 5th of December 2023

Course name: Mathematics 1a (Polytechnical foundation) Course no. 01001\01003
Exam duration: 2 hours

Aid: No electronic aid

"Weighting": All questions in this exam are weighted equally. This part of the exam counts for 50% of the whole exam.

Additional information: The questions are posed first in Danish and then in English. All answers have to be motivated and intermediate steps need to be given to a reasonable extent.

Opgave 1

a) Beregn sandhedstabellen for følgende logiske udsagn: $(P \Rightarrow R) \Leftrightarrow Q$.

b) Er de logiske udsagn $(P \Rightarrow R) \Leftrightarrow Q$ og $(R \Rightarrow P) \Leftrightarrow Q$ logisk ækvivalente?

Opgave 2

Skriv følgende komplekse tal på rektangulær form:

a) $e^{i\pi/2} \cdot (2+i)$.

b) $(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2})^4$.

Opgave 3

For alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ defineres

$$s_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{k}{2}.$$

Besvar nu følgende spørgsmål:

a) Beregn s_2, s_3 og s_4.

b) Vis med induktion efter n at $s_n = \frac{n^2+n-2}{4}$ for alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$.

Opgave 4

Der gives følgende matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}.$$

a) Afgør om matricen $\mathbf{A}$ er invertibel. Hvis ja, beregn $\mathbf{A}^{-1}$.

b) Lad nu n være et naturligt tal og $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ en invertibel matrix. Kan 0 være en egenværdi for $\mathbf{B}$? Gør rede for dit svar.

Opgave 5

Lad $V = \{a + bZ + cZ^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ være underrummet af det reelle vektorrum $\mathbb{R}[Z]$ bestående af polynomier af grad højst 2. Der vælges følgende ordnede basis for V:

$$\gamma = (1 + 2Z, 2 + Z - Z^2, Z^2).$$

For en lineær afbildning $L : V \to V$ oplyses følgende afbildningsmatrix:

$$_\gamma[L]_\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Hvilke af basisvektorerne $1 + 2Z$, $2 + Z - Z^2$ og Z^2 er i $\ker(L)$? Er polynomiet $1 + 2Z + Z^2$ i $\ker(L)$? Gør rede for dit svar.

b) Find baser for $\ker(L)$ og $\text{image}(L)$.

Opgave 6

Givet følgende reelle system af differentialligninger:

$$\begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}.$$

a) Er det givne system af differentialligninger homogent eller inhomogent?

b) Beregn systemets fuldstændige reelle løsning.

EKSAMEN SLUT

Question 1

a) Determine the truth table of the following logical proposition: $(P \Rightarrow R) \Leftrightarrow Q$.

b) Are the logical propositions $(P \Rightarrow R) \Leftrightarrow Q$ and $(R \Rightarrow P) \Leftrightarrow Q$ logically equivalent?

Question 2

Write the following complex numbers in rectangular form:

a) $e^{i\pi/2} \cdot (2+i)$.

b) $(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2})^4$.

Question 3

For all $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ one defines

$$s_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{k}{2}.$$

Now answer the following questions:

a) Compute s_2, s_3 and s_4.

b) Show using induction on n that $s_n = \frac{n^2+n-2}{4}$ for all $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$.

Question 4

The following matrix is given:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}.$$

a) Determine whether or not the matrix $\mathbf{A}$ is invertible. If yes, compute $\mathbf{A}^{-1}$.

b) Let n be a natural number and $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ an invertible matrix. Can 0 be an eigenvalue of $\mathbf{B}$? Motivate your answer.

Question 5

Let $V = \{a + bZ + cZ^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ be the subspace of the real vector space $\mathbb{R}[Z]$ consisting of polynomials of degree at most 2. The following ordered basis for V is chosen:

$$\gamma = (1 + 2Z, 2 + Z - Z^2, Z^2).$$

For a linear map $L : V \to V$ the following mapping matrix is given:

$$_\gamma[L]_\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Which of the basis vectors $1 + 2Z$, $2 + Z - Z^2$ and Z^2 are in $\ker(L)$? Is the polynomial $1 + 2Z + Z^2$ in $\ker(L)$? Motivate your answer.

b) Find bases for $\ker(L)$ and $\text{image}(L)$.

Question 6

The following real system of differential equations is given:

$$\begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}.$$

a) Is the given system homogeneous or inhomogeneous?

b) Determine the general real solution of the system.

END OF THE EXAM