Hjemmeopgave 3

Løs følgende opgaver uden elektroniske hjælpemidler. Alle svar skal være motiverede og mellemregninger skal angives i passende omfang.

a) Beregn rangen af følgende matrix:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Givet et homogent lineært ligningssystem over $\mathbb{R}$ med fire ligninger med tre ubekendte. Det oplyses at nedenstående to vektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er løsninger til systemet.

1. Kan det afgøres om vektoren $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}$ er en løsning til systemet?

2. Kan det afgøres om vektoren $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ er en løsning til systemet?

c) Bestem om følgende 3 vektorer i $\mathbb{R}^4$ er lineært uafhængige:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

d) Lad n være et naturligt tal og lad $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ være to $n \times n$ matricer.

Vis identiteten $((\mathbf{A}+\mathbf{B})^2)^T = (\mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T)^2$

Opgavesættet fortsættes på næste side.

e) Beregn determinanten af følgende matrix:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

f) Lad n være et naturligt tal og lad $\mathbf{A}$ være en $n \times n$ matrix på formen:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_3 & 0 & 0 \\ \vdots & \iddots & & & \\ \lambda_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En sådan matrix kaldes en antidiagonal matrix.

1. Find determinanten for $n = 2, 3$ og 4

2. Vis for alle naturlige tal $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ at

$$\det(\mathbf{A}) = (-1)^{\frac{n(n+3)}{2}} \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n.$$

Vink: Brug induktion efter n.

Opgaverne afleveres på **DTU Learn side** under "Assignments". Deadline er **Søndag den 10 november, 23:55**.