Løsnings skitse Eksamen 01001 del 1

Opgave 1.

a)

P	R	Q	$P \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow R) \Leftrightarrow Q$	$R \Rightarrow P$	$(R \Rightarrow P) \Leftrightarrow Q$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	T	F
T	F	T	F	F	T	T
T	F	F	F	T	T	F
F	T	T	T	T	F	F
F	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	F	T	F

b) Linje 3 i tabellen ovenfor viser at de to udsagn <u>ikke</u> er ækvivalente.

Opgave 2.

a)

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot (2+i) = i \cdot (2+i) = \underline{-1+2i}$$

b)

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4 = e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi)$$

$$= \underline{-1}$$

Opgave 3

a) $\underline{S_2} = \sum_{k=2}^{2} \frac{k}{2} = \underline{1}$, $\underline{S_3} = S_2 + \frac{3}{2} = \underline{\frac{5}{2}}$, $\underline{S_4} = S_3 + \frac{4}{2} = \underline{\frac{9}{2}}$

b) Vises med induktion:

Basistrin $n=2$.

Fra a) fås $S_2 = 1$, da $\frac{2^2+2-2}{4} = 1$, hvilket vises påstanden for $n=2$.

Induktions trin.

Antag sand for $n-1$:

$$S_{n-1} = \frac{(n-1)^2+(n-1)-2}{4} = \frac{n^2-n-2}{4}$$

Vi betragter

$$S_n = S_{n-1} + \frac{n}{2} = \frac{n^2-n-2}{4} + \frac{n}{2} = \frac{n^2-n-2+2n}{4}$$

$$= \frac{n^2+n-2}{4}$$

hvilket viser formlen

Opgave 4

a) $\det(\underline{\underline{A}}) = 1$ så $\underline{\underline{A}}$ er invertibel

$\underline{\underline{A}}^{-1}$ findes:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 \leftarrow R_2+3R_1]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_1 \leftarrow R_1+2R_2]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \qquad \underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Antag $\lambda = 0$ er en egenværdi for $\underline{\underline{B}}$.

$\underline{\underline{B}}\,\underline{v} = \lambda \underline{v}$ hvor $\underline{v} \neq \underline{0}$

$\Downarrow$

$\underline{\underline{B}}\,\underline{v} = 0 \cdot \underline{v} = \underline{0}$.

$\underline{\underline{B}}$ er invertibel, herved fås:

$$\underline{\underline{B}}\,\underline{v} = \underline{0} \longrightarrow \underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{B}}\,\underline{v} = \underline{\underline{B}}^{-1} \cdot \underline{0} \Leftrightarrow \underline{v} = \underline{0}$$

hvilket er en modstrid da $\underline{v}$ var en egenvektor.

$\underline{\underline{B}}$ kan ikke have egenværdier som er nul!

Opgave 5.

a) Basisvektorernes koordinater findes:

$$(1+2z)_\gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2+z-z^2)_\gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (z^2)_\gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$${}_\gamma[L]_\gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad {}_\gamma[L]_\gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}_\gamma[L]_\gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

herved ses at det kun er z^2 som ikke ligger i $\ker(L)$

$$(1+2z+z^2)_\gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{da} \quad 1 \cdot (1+2z) + 0(2+z-z^2) + 1 \cdot (z^2) = 1+2z+z^2$$

${}_\gamma[L]_\gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ så $(1+2z+z^2)$ ligger ikke i $\ker(L)$!

b) Basis for $\ker(L)$ findes:

Kernen for ${}_\gamma[L]_\gamma$ er:

$$\ker\left({}_\gamma[L]_\gamma\right) = s\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad s,t \in \mathbb{R}.$$

Basis for kernen af L er udspændt af de første 2 basis vektorer:

$$\ker(L) = \text{span}_{\mathbb{R}}\left(1+2z,\ 2+z-z^2\right)$$

Basis kunne være: $(1+2z, 2+z-z^2)$

Billedrummet er udspændt af den 3 søjle i afbildningsmatricen svarende til vektoren:

$$\text{Image}(L) = \text{span}_{\mathbb{R}}\left(2+z-z^2\right)$$

Basis kunne være: $(2+z-z^2)$

Opgave 6.

a) Systemet kan skrives på formen:

$$\begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}$$

hvor $q_1(t) = q_2(t) = 0$.

Systemet er dermed homogent.

b) Egenvektorer og egenværdier for koefficient matricen findes:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 5 & -2-\lambda \end{bmatrix}\right) = (2-\lambda)(-2-\lambda) - 5 = \lambda^2 - 9 = 0$$

$\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 3$.

Egenvektorer aflæses:

$$\lambda_1 = -3, \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = 3, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

5

Den fuldstændige reelle løsning er givet ved

$$\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$