Hjemmeopgave 4

Løs følgende opgaver uden elektroniske regneredskaber. Alle svar skal være motiverede og mellemregninger skal angives i passende omfang.

a) Lad V være det komplekse vektorrum $\mathbb{C}^{2\times 4}$ bestående af 2×4 matricer med komplekse koefficienter. Har V et komplekst underrum af dimension 9?

b) Lad W være udspændt af følgende vektorer i $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Angiv en basis for W og beregn $\dim_{\mathbb{R}}(W)$.

c) Lad $L : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ være defineret som følger:

$$L\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{C}.$$

Der gives de ordnede baser

$$\beta = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \quad \text{for } \mathbb{C}^2 \text{ og } \quad \gamma = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \quad \text{for } \mathbb{C}^3.$$

Beregn afbildningsmatricen ${}_\beta[L]_\gamma$.

d) Givet følgende matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Bestem matricens egenværdier og baser for de tilhørende egenrum. Kan matricen diagonaliseres? Hvis nej, forklar hvorfor ikke. Hvis ja, angiv en matrix $\mathbf{Q}$ og en diagonalmatrix $\mathbf{\Lambda}$ således at $\mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}$.

e) 1. Lad V betegne det reelle vektorrum $\mathbb{R}^{2\times 2}$ bestående af 2×2 matricer med reelle koefficienter. Der vælges følgende ordnede basis for V:

$$\beta = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

Givet den lineære afbildning $M : V \to V$ defineret ved

$$M(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} \in V.$$

Beregn afbildingsmatricen ${}_\beta[M]_\beta$.

2. Beregn dimension af vektorrummene $\ker(M)$ og $\text{image}(M)$. Vink: afbildingsmatricen ${}_\beta[M]_\beta$ kan bruges med fordel.

Opgaverne skal afleveres på kursets **DTU Learn** side under "afleveringer". Deadline er **lørdag den 30. november 23:55**.