

Danmarks Tekniske Universitet

Side 1 af 6 sider

Skriftlig eksamen, d. 26. maj 2026

Kursusnavn: Matematik 1a (Polyteknisk grundlag)
Eksamensvarighed: 4 timer

Kursusnr. 01001

Hjælpemidler: Skriftlige hjælpemidler tilladt (Ingen lommeregner tilladt)

Vægtning: Opgavesættet består af to dele: Først en del hvor svarene skal begrundes, Opgave 1-5 og dernæst en MC-del, MC-Opgave 1-8. De to dele i denne eksamen vægtes ens.

Yderligere information: I den første del vægtes alle delspørgsmål ens, alle svar skal være motiverede, og mellemregninger skal angives i passende omfang. I den anden del af prøven, MC delen, vægtes alle opgaver ens, et forkert eller manglende svar giver 0 point. Kun svarene må angives i MC-opgaverne.

Opgave 1

En funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ er defineret ved funktionsforskriften $f(x) = x^2 - x$.

- Beregn $f(0)$, $f(1)$ og $f(2)$.
- Er funktionen f injektiv?
- Er funktionen f invertibel?

Opgave 2

Et komplekst tal z er givet på polær form $z = 2e^{i\pi/6}$.

- Bestem z på rektangulær form.
- Bestem z^6 på rektangulær form.
- Bestem et positivt heltal n således at z^n er et positivt reelt tal.

Opgave 3

Givet matricen

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

- Giv en ordnet basis for søjlerummet $\text{colsp}_{\mathbb{R}}(\mathbf{C})$ og bestem \mathbf{C} 's rang.
- Bestem determinanten af \mathbf{C} .

Opgave 4

Lad $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ betegne det reelle vektorrum bestående af alle 2×2 matricer med reelle elementer. Der gives følgende to matricer i V :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lad $\mathbf{0}$ betegne nulmatricen i V . Der gives afbildningen $L : V \rightarrow V$ defineret ved forskriften $L(\mathbf{M}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{M} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{A}$.

- Beregn $L(\mathbf{0})$, $L(\mathbf{A})$ og $L(\mathbf{B})$.
- Gør rede for at L er en lineær afbildning.
- Der gives den ordnede basis

$$\varepsilon = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

for V . Beregn afbildningsmatricen ${}_{\varepsilon}[L]_{\varepsilon}$.

Opgave 5

Der gives følgende matrix:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

- Find en diagonalmatrix \mathbf{D} og invertibel matrix \mathbf{Q} således at $\mathbf{D} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{Q}$.
- Vis med induktion efter n at

$$\mathbf{M}^n = \begin{bmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

for alle naturlige tal n .

MC Del – aflever dette ark sammen med besvarelsen af de øvrige opgaver.

Studienummer: _____

MC Opgave 1. Lad P og Q være logiske udsagn.

Hvilket af nedenstående logiske udsagn er ækvivalent med

$$(\neg Q \wedge P) \wedge \neg(\neg P \vee Q) ?$$

Svarmuligheder (afkryds kun en):

- | | | | |
|---|---------------------------------------|---|--|
| <input type="radio"/> $P \vee \neg Q$ | <input type="radio"/> $P \wedge Q$ | <input type="radio"/> $\neg P \wedge Q$ | <input type="radio"/> $\neg P \wedge \neg Q$ |
| <input type="radio"/> $P \wedge \neg Q$ | <input type="radio"/> $\neg P \vee Q$ | <input type="radio"/> $P \Rightarrow Q$ | <input type="radio"/> $Q \Rightarrow P$ |
-

MC Opgave 2. Hvad er den polære form af det komplekse tal $z = 1 - i$?

Svarmuligheder (afkryds kun en):

- | | | | |
|---|---|--|-------------------------------------|
| <input type="radio"/> $\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ | <input type="radio"/> $2e^{-i\pi/4}$ | <input type="radio"/> $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$ | <input type="radio"/> $2e^{i\pi/4}$ |
| <input type="radio"/> $e^{-i\pi/2}$ | <input type="radio"/> $\sqrt{2}e^{-i\pi/2}$ | <input type="radio"/> $\sqrt{2}e^{i\pi/2}$ | <input type="radio"/> $e^{-i\pi/4}$ |
-

MC Opgave 3. Hvilken af nedenstående polynomier er resultatet af divisionen

$$\frac{2Z^3 + Z^2 - 12Z + 9}{2Z - 3} ?$$

Svarmuligheder (afkryds kun en):

- | | | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| <input type="radio"/> $Z^2 + 2Z - 1$ | <input type="radio"/> $Z^2 - Z + 3$ | <input type="radio"/> $Z^2 + 2Z - 3$ | <input type="radio"/> $Z^2 - 2Z + 3$ |
| <input type="radio"/> $Z^2 + Z - 3$ | <input type="radio"/> $Z^2 - 3Z + 1$ | <input type="radio"/> $Z^2 + 3Z - 1$ | <input type="radio"/> $Z^2 - Z - 3$ |
-

MC Opgave 4. Lad

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = [1 \ 3].$$

Angiv nedenfor resultatet af udregningen $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}^T$.

Svarmuligheder (afkryds kun en):

- | | | | |
|---|--|---|---|
| <input type="radio"/> $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ | <input type="radio"/> $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ | <input type="radio"/> $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ | <input type="radio"/> $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ |
| <input type="radio"/> $[1 \ -2]$ | <input type="radio"/> $[2 \ 1]$ | <input type="radio"/> $[-1 \ -2]$ | <input type="radio"/> $[3 \ 1]$ |
-

MC Opgave 5. Hvilket af nedenstående tal er en egenverdi for matricen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} ?$$

Svarmuligheder (afkryds kun en):

- | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------|---------------------------|
| <input type="radio"/> -4 | <input type="radio"/> -1 | <input type="radio"/> 0 | <input type="radio"/> 1 |
| <input type="radio"/> -2 | <input type="radio"/> 3 | <input type="radio"/> 4 | <input type="radio"/> 6 |

MC Opgave 6. Lad $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^2$ være en rekursivt defineret funktion givet ved

$$f(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad f(n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} f(n-1), \quad n \geq 2.$$

Hvilken af nedenstående vektorer angiver $f(3)$?

Svarmuligheder (afkryds kun en):

- | | | | |
|---|---|---|---|
| <input type="radio"/> $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ | <input type="radio"/> $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ | <input type="radio"/> $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ | <input type="radio"/> $\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ |
| <input type="radio"/> $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ | <input type="radio"/> $\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}$ | <input type="radio"/> $\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$ | <input type="radio"/> $\begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix}$ |
-

MC Opgave 7. Lad V være et underrum af \mathbb{R}^3 med ordnet basis

$$b = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Hvilken af følgende vektorer i \mathbb{R}^3 tilhører ikke V ?

Svarmuligheder (afkryds kun en):

- | | | | |
|---|--|---|---|
| <input type="radio"/> $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ | <input type="radio"/> $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ | <input type="radio"/> $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ | <input type="radio"/> $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ |
| <input type="radio"/> $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ | <input type="radio"/> $\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ | <input type="radio"/> $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ | <input type="radio"/> $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ |
-

MC Opgave 8. Lad $a, b \in \mathbb{R}$ være konstanter, og lad $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ være en funktion.

Betragt differentiaalligningen

$$f''(t) + af'(t) + bf(t) = q(t).$$

For hvilke værdier af a , b og $q(t)$ er funktionen

$$f(t) = e^t \cos(2t) + 3e^t \sin(2t) + 5t$$

en løsning?

Svarmuligheder (afkryds kun en):

- | | |
|--|--|
| <input type="radio"/> $a = -2, \quad b = 5, \quad q(t) = 10t - 25$ | <input type="radio"/> $a = -2, \quad b = 2, \quad q(t) = 10t - 10$ |
| <input type="radio"/> $a = 2, \quad b = 5, \quad q(t) = 25t + 10$ | <input type="radio"/> $a = -1, \quad b = 5, \quad q(t) = 25t$ |
| <input type="radio"/> $a = -2, \quad b = 4, \quad q(t) = 20t - 10$ | <input type="radio"/> $a = 2, \quad b = 5, \quad q(t) = 25t - 10$ |
| <input type="radio"/> $a = -2, \quad b = 5, \quad q(t) = 25t - 10$ | <input type="radio"/> $a = -2, \quad b = 3, \quad q(t) = 15t - 10$ |
-

EKSAMEN SLUT