MC eksamensopgave 01001 Mat 1a E23

Der anvendes en scoringsalgoritme, som er baseret på "One best answer"

Dette betyder følgende:
Der er altid netop ét svar som er mere rigtigt end de andre
Studerende kan kun vælge ét svar per spørgsmål
Hvert rigtigt svar giver 1 point
Hvert forkert svar giver 0 point (der benyttes IKKE negative point)

The following approach to scoring responses is implemented and is based on "One best answer"
There is always only one correct answer – a response that is more correct than the rest
Students are only able to select one answer per question
Every correct answer corresponds to 1 point
Every incorrect answer corresponds to 0 points (incorrect answers do not result in subtraction of points)

Lad matricerne $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ være givet ved:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Hvilket af nedenstående tal angiver determinanten af $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$?

Vælg en svarmulighed

- ○ $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = -21$
- ○ $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = 21$
- ○ $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = 0$
- ○ $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = -42$
- ☒ $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = 42$

$$\det(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) = \det(\underline{\underline{A}}) \cdot \det(\underline{\underline{B}})$$

$$\det(\underline{\underline{A}}) = 2 \cdot (3 \cdot (-2) - 7 \cdot 0) - 1 \cdot ((-1)(-2) - 7 \cdot 3)$$
$$= -12 + 19 = 7$$

$$\det(\underline{\underline{B}}) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

Lad $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ være en invertibel matrix, og lad $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \end{bmatrix}$ være en søjlevektor.
Hvilken søjlevektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ er en løsning til ligningen $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$?

Vælg en svarmulighed

- [x] $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix}$
- [ ] $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -10 \\ 6 \end{bmatrix}$
- [ ] $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 10 \\ -6 \end{bmatrix}$
- [ ] $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$
- [ ] $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -6 \\ -10 \end{bmatrix}$

$$\underline{\underline{I}} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 12 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 \frac{1}{2}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 + R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

Givet andengradspolynomiet:

$$p(z) = 3z^2 - 6z + 6 \quad , \quad z \in \mathbb{C}$$

Hvilket af nedenstående svarmuligheder angiver polynomiets diskriminant d og en af polynomiets rødder r?

Vælg en svarmulighed

- ○ $d = -6i, r = 1 - i$
- ○ $d = 6i, r = 1 + i$
- ○ $d = 0, r = 1 + i$
- ○ $d = -36, r = i - 1$
- ☒ $d = -36, r = 1 - i$

$$d = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = 6(6-12) = -36$$

$$\left.\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix}\right\} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{-36}}{2 \cdot 3} = 1 \pm i$$

Betragt den reelle differentialligning:

$f'(t) = \frac{1}{t} f(t) + t$ hvor $t > 0$.

Hvilket af nedenstående udtryk er en partikulær løsning til differentialligningen?

Vælg en svarmulighed

- ○ $f(t) = t^2 + ce^t \;,\; t > 0 \,, c \in \mathbb{R}$
- ○ $f(t) = ce^t + 1 \;,\; t > 0 \,, c \in \mathbb{R}$
- ○ $f(t) = t^2 - 1 \;,\; t > 0$
- ☒ $f(t) = t^2 \;,\; t > 0$
- ○ $f(t) = t(t^2 + t) \;,\; t > 0$

Panzers formel. $t > 0$.

$a(t) = \frac{1}{t} \qquad A(t) = \ln t$

$q(t) = t$

$f(t) = e^{A(t)} \cdot \left(\int e^{-A(t)} \cdot q(t)\, dt + k \right), \quad k \in \mathbb{R}.$

$= k e^{\ln t} + e^{\ln t} \cdot \int e^{-\ln t} \cdot t\, dt \qquad \boxed{e^{-\ln t} = (e^{\ln t})^{-1} = \frac{1}{t}}$

$= k \cdot t + t \int \frac{1}{t} \cdot t\, dt$

$= kt + t^2$

Eneste løsning i listen er $(k=0)$ løsningen.

Betragt den reelle andenordens differentialligning:

$$f''(t) - 6f'(t) + 9f(t) = 0$$

Hvilket af nedenstående udtryk er ***IKKE*** en løsning til differentialligningen?

Vælg en svarmulighed

- ○ $f(t) = e^{3t}(t-1)\ ,\ t \in \mathbb{R}$
- ○ $f(t) = 0\ ,\ t \in \mathbb{R}$
- ○ $f(t) = te^{3t}\ ,\ t \in \mathbb{R}$
- X $f(t) = cos(3t) + sin(3t)\ ,\ t \in \mathbb{R}$
- ○ $f(t) = 4e^{3t}\ ,\ t \in \mathbb{R}$

karakter ligning: $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$

$d = (-6)^2 - 4 \cdot 9 = 0$

$\lambda = \frac{-(-6)}{2} = 3$ er dobbeltrod

Løsningerne er:

$f(t) = k_1 e^{3t} + k_2 t e^{3t}\ ,\ k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

Lad matricen $\mathbf{A}$ være givet ved:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

I hvilket af nedenstående udtryk er $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ egenvektorer for matricen $\mathbf{A}$?

Vælg en svarmulighed

- ○ $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$
- ○ $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
- ○ $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
- ☒ $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
- ○ $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = \det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 & 5 \\ 0 & 0-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 0-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= (2-\lambda)\left((-\lambda)^2 - (-2)^2\right) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4)$$

$\lambda_1 = 2$ med $am(\lambda_1) = 2$

$\lambda_2 = -2$ med $am(\lambda_2) = 1$

Egenvektor hørende til $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot t \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

Egenvektorer hørende til $\lambda_2 = -2$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lad $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ være en matrix.

Lad $L_{\mathbf{A}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være en lineær afbildning givet ved: $L_{\mathbf{A}}(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v}$.

Det oplyses at $L_{\mathbf{A}}$ har egenværdierne: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$
med tilhørende egenrum:

$$E_{\lambda_1} = span_{\mathbb{R}}\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right),\ E_{\lambda_2} = span_{\mathbb{R}}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right),\ E_{\lambda_3} = span_{\mathbb{R}}\left(\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right)$$

Angiv hvilken af følgende matricer der er matricen $\mathbf{A}$.

V er basis af egenvektorer

Vælg en svarmulighed

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&0\\0&0&1\\-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}$

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0&-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\\1&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\end{bmatrix}$

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\1&0&0\\0&-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

- X $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&-\frac{3}{2}\\0&1&0\\-\frac{3}{2}&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

$$_V[L]_V = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} = {}_e[L]_e$$

$$\underline{\underline{A}} = {}_e[id]_V \cdot {}_V[L]_V \cdot {}_V[id]_e$$

$$_e[id]_V = \begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

$$_V[id]_e = \begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}^{-1}$$