Givet er følgende lineære ligningssystem over $\mathbb{R}$ i de tre ubekendte $x_1, x_2,$ og x_3:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 4 \end{cases}$$

Hvilke af nedenstående mængder angiver den fuldstændige løsning til systemet?

Vælg en svarmulighed

- ☒ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$
- ○ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
- ○ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$
- ○ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$
- ○ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 6 - 3t \\ x_2 = 1 - t \\ x_3 = t \end{cases} \Leftrightarrow \underline{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$$

Givet er:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ og } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hvilke af følgende udtryk er identisk med udtrykket $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T \cdot \mathbf{v}$?

Vælg en svarmulighed

- ○ $\begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}$
- ○ $\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$
- ☒ $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$
- ○ $\begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$
- ○ $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^T \cdot \underline{v}$$

$$= \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{v}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Givet er matricen:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & -1 & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

For hvilken værdi af $a \in \mathbb{R}$ er matricen $\mathbf{A}$ invertibel?

Vælg en svarmulighed

- ○ $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$
- ☒ $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 4\}$
- ○ $a \in \{-2, 4\}$
- ○ $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- ○ $a \in \mathbb{R}$

$$\det(\underline{\underline{A}}) = a^2 - 2a - 8 = 0$$

$$\Updownarrow \quad a = \begin{cases} -2 \\ 4 \end{cases}$$

Invertibel for $\det(\underline{\underline{A}}) \neq 0$, så

for $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 4\}$

Det er givet, at $Q(z)$ er et polynomium af grad 2 med rødderne 1 og 3.
Givet er

$$P(z) = Q(z) \cdot (z^3 - 5z^2 - z + 5)$$

og det oplyses, at $P(z)$ har roden $z = -1$. Angiv alle rødder i P samt deres multipliciteter?

Vælg en svarmulighed

- ○ $z_1 = -1$ med multiplicitet 1, $z_2 = 3$ med multiplicitet 1, $z_3 = 5$ med multiplicitet 1, og $z_4 = 1$ med multiplicitet 1
- ○ $z_1 = -1$ med multiplicitet 2, $z_2 = 1$ med multiplicitet 2, og $z_3 = 3$ med multiplicitet 1
- ○ $z_1 = -1$ med multiplicitet 1, $z_2 = 1$ med multiplicitet 1, og $z_3 = 3$ med multiplicitet 1
- ○ $z_1 = 0$ med multiplicitet 1, $z_2 = 1$ med multiplicitet 1, $z_3 = 3$ med multiplicitet 1, og $z_4 = 5$ med multiplicitet 1
- ☒ $z_1 = -1$ med multiplicitet 1, $z_2 = 3$ med multiplicitet 1, $z_3 = 5$ med multiplicitet 1, og $z_4 = 1$ med multiplicitet 2

$P(z) = Q(z)(z^3 - 5z^2 - z + 5)$

$= q_2(z-1)(z-3)(z+1)R(z)$, hvor q_2 er højestegradskoefficienten i $Q(z)$

Finder $R(z)$ via division med $z+1$ til

$R(z) = z^2 - 6z + 5$, med rødder $z = \begin{cases} 1 \\ 5 \end{cases}$

Alle rødder: $1, 3, 5, -1$, hvor $am(1) = 2$ og resten har am på 1.

Lad matricen $\mathbf{B}$ være givet ved:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 6 & -3 & -1 \\ -6 & 5 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Vælg matricer Λ og $\mathbf{V}$ således at $\mathbf{V}^{-1}\,\mathbf{B}\,\mathbf{V} = \Lambda$

Vælg en svarmulighed

- $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$
- X $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$
- $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$
- Der findes ingen matricer $\mathbf{B}$ og Λ, som opfylder den givne sammenhæng.

Egenværdier og tilhørende vektorer:

$\lambda_1 = 4$ $\qquad$ $\lambda_2 = -2$ $\qquad$ $\lambda_3 = 2$

$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $\underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Rækkefølgen er valgfri <u>men</u> skal stemme overens mellem $\underline{\underline{V}}$'s søjler og $\underline{\underline{\Lambda}}$'s diag-elementer.

Lad V være et underrum i $\mathbb{R}[Z]$, og lad V være udstyret med den ordnede basis $\alpha = (1, Z, Z^2)$. Om en lineær afbildning $f : V \to V$ oplyses følgende:

$$f(1) = 1 + Z\,,\ f(Z) = 1 - Z\,,\ \text{og } f(Z^2) = Z + Z^2$$

Hvad er egenværdierne af denne afbildning?

Vælg en svarmulighed

- $-1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}$
- $1, -1, 1$
- $\sqrt{2}, -1, 1$
- $-\sqrt{2}, 0, 1$
- X $1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$

$$[f(1)]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [f(Z)]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [f(Z^2)]_\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}_\alpha[f]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{Afbildningsmatrix}$$

Egenværdier: $\lambda = \begin{cases} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{cases}$

Et reelt differentialligningssystem er givet ved

$$\begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}, \text{ hvor } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Det oplyses at $\begin{bmatrix} f_1(0) \\ f_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Hvad er løsningen?

Vælg en svarmulighed

- ○ $f_1(t) = 6e^{2t}$, $f_2(t) = 0$
- ○ $f_1(t) = 5e^{2t} + e^{-4t}$, $f_2(t) = 5e^{2t} - 5e^{-4t}$
- ○ $f_1(t) = e^{2t} + 5e^{-4t}$, $f_2(t) = e^{2t} - e^{-4t}$
- ☒ $f_1(t) = 3e^{2t} + 3e^{-4t}$, $f_2(t) = 3e^{2t} - 3e^{-4t}$
- ○ $f_1(t) = e^{2t}$, $f_2(t) = e^{-4t}$

Egenværdier og -vektorer:

$\lambda_1 = -4$ $\qquad$ $\lambda_2 = 2$

$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Fuldstændige løsning:

$$\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{-4t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Betingede løsning:

$$c_1 e^{-4 \cdot 0} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2 \cdot 0} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} c_1 = -3 \\ c_2 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = -3 e^{-4t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Et polynomium er givet ved:

$$P(Z) = Z^2 + aZ + b\ ,\ a, b \in \mathbb{C}$$

Det oplyses at $z_1 = 1 + i$ og $z_2 = 2i$ er rødder i P. Hvad er værdierne af a og b?

Vælg en svarmulighed

- ○ $a = 1 + i\ ,\ b = 2i$
- ○ $a = 3i + 1\ ,\ b = 2 - 2i$
- ○ $a = 3i - 1\ ,\ b = -2 + 2i$
- ○ $a = -3i - 1\ ,\ b = -2 - 2i$
- ☒ $a = -3i - 1\ ,\ b = -2 + 2i$

$$\begin{cases} (1+i)^2 + a(1+i) + b = 0 \\ (2i)^2 + a(2i) + b = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} a(1+i) + b = -2i \\ a(2i) + b = 4 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1+i & 1 & -2i \\ 2i & 1 & 4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1-3i \\ 0 & 1 & -2+2i \end{array}\right]$$

MC testeksamen

Der anvendes en scoringsalgoritme, som er baseret på "One best answer"

Dette betyder følgende:
Der er altid netop ét svar som er mere rigtigt end de andre
Studerende kan kun vælge ét svar per spørgsmål
Hvert rigtigt svar giver 1 point
Hvert forkert svar giver 0 point (der benyttes IKKE negative point)

The following approach to scoring responses is implemented and is based on "One best answer"
There is always only one correct answer – a response that is more correct than the rest
Students are only able to select one answer per question
Every correct answer corresponds to 1 point
Every incorrect answer corresponds to 0 points (incorrect answers do not result in subtraction of points)

Løsninger, nov. 23
Shsp.