Kapitel 11

Egenværdiproblemet og diagonalisering

Lad os tage et kig på Eksempel 10.3.4 igen. Her arbejdede vi med matricen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

og den tilknyttede lineære afbildning $L_{\mathbf{A}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Vi så, at hvis vi valgte den samme ordnede basis $\beta = \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ for både definitionsmængden og dispositionsmængden for $L_{\mathbf{A}}$, så var den resulterende afbildningsmatrix ${}_\beta[L_{\mathbf{A}}]_\beta$ for $L_{\mathbf{A}}$ særligt pæn:

$${}_\beta[L_{\mathbf{A}}]_\beta = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

I dette kapitel undersøger vi, i hvilket omfang dette kan gøres for en vilkårlig kvadratisk matrix.

11.1 Egenvektorer og egenværdier

Vi lægger ud med at studere lineære afbildninger af typen $L : V \to V$. Forskellen fra vores tidligere studier af lineære afbildninger er, at vi nu antager, at definitionsmængden for L er den samme som dispositionsmængden for L, nemlig vektorrummet V.

Definition 11.1.1

Lad $\mathbb{F}$ være et legeme, V et vektorrum over $\mathbb{F}$ og $L : V \to V$ en lineær afbildning. Lad $\mathbf{v} \in V$

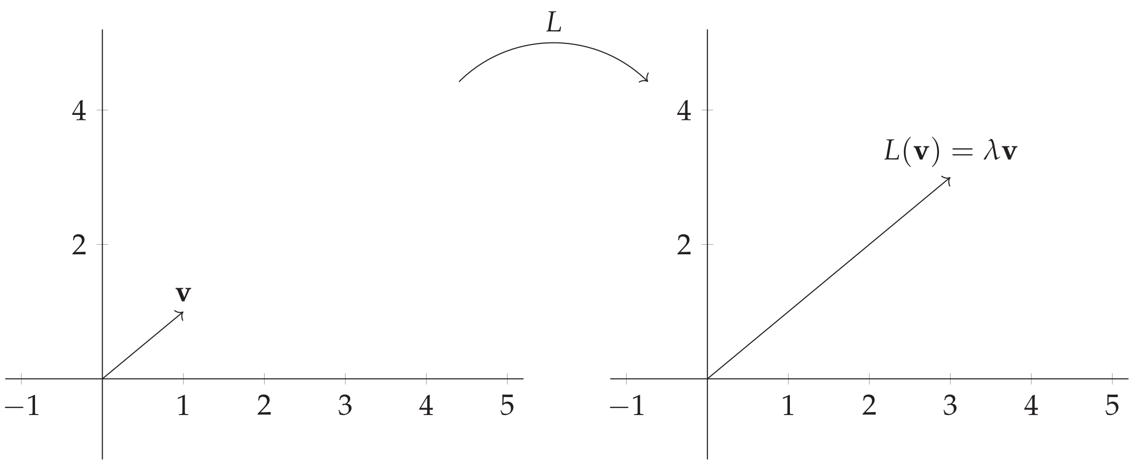
være en vektor forskellig fra nulvektoren og $\lambda \in \mathbb{F}$ en skalar, således at

$$L(\mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{v}.$$

Da kaldes vektoren $\mathbf{v}$ en *egenvektor* for den lineære afbildning L med *egenværdi* λ.

Bemærk, at begreberne egenvektor og egenværdi på engelsk kaldes de tyskklingende *eigenvector*, henholdsvis *eigenvalue*.

Definitionen angiver, at en egenvektor per definition altid er en vektor forskellig fra nulvektoren. Grunden til dette er, at man typisk ønsker at udelade uinteressante løsninger til ligningen $L(\mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{v}$. Vælger man $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ og en hvilken som helst $\lambda \in \mathbb{F}$, vil der nemlig altid gælde, at $L(\mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{v}$, da $L(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, og $\lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Bemærk også, at en egenværdi altid er et element fra legemet $\mathbb{F}$, over hvilket V er et vektorrum. Intuitivt set er en egenvektor for en lineær operator L en vektor, der skaleres, når L opererer på den. Vi kan opfatte $\lambda \cdot \mathbf{v}$ som en skalering af vektoren $\mathbf{v}$ med faktor λ. Se Figur 11.1 for en illustration.



Figur 11.1: En egenvektor for en lineær afbildning L.

For matricer kan man også tale om egenvektorer og egenværdier:

Definition 11.1.2

Lad $\mathbb{F}$ være et legeme, n et positivt heltal og $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ en matrix. Lad $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$ være en vektor forskellig fra nulvektoren og $\lambda \in \mathbb{F}$ en skalar, således at

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}.$$

Da kaldes vektoren $\mathbf{v}$ en *egenvektor* for matricen $\mathbf{A}$ med *egenværdi* λ.

Bemærk, at denne definition antager, at matricen $\mathbf{A}$ er en kvadratisk matrix. Som vi har set tidligere, giver en matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m\times n}$ anledning til en lineær afbildning $L_{\mathbf{A}} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$. Hvis $m = n$, ser vi derfor, at en kvadratisk matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ giver anledning til en lineær afbildning $L_{\mathbf{A}} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$. Bemærk, at $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$ er en egenvektor for en kvadratisk matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$, hvis og kun hvis $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$ er en egenvektor for den lineære afbildning $L_{\mathbf{A}} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$. I den forstand er Definition 11.1.2 blot et særtilfælde af Definition 11.1.1. Matricer opfylder desuden, at hvis legemet er valgt til at være $\mathbb{F}$, så er matricens egenværdier per definition elementer i legemet $\mathbb{F}$.

Lad os gennemgå nogle eksempler.

Eksempel 11.1.1

Lad $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, og betragt matricen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Spørgsmål: Bestem alle egenværdier for matricen $\mathbf{A}$ samt en tilhørende egenvektor for hver af dem.

Svar: Antag, at $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ er en egenvektor med egenværdi λ. Ligningen $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}$ svarer til de to ligninger $-v_1 = \lambda v_1$ og $2v_2 = \lambda v_2$. Disse to ligninger kan omskrives til $(-1-\lambda)v_1 = 0$ og $(2-\lambda)v_2 = 0$, som igen kan skrives på matrixform som følger:

$$\begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{11.1}$$

Nu skelner vi mellem tre tilfælde.

I det første tilfælde antager vi, at $-1-\lambda \neq 0$, og $2-\lambda \neq 0$. Med andre ord: vi antager, at $\lambda \neq -1$, og $\lambda \neq 2$. I dette tilfælde er de diagonalelementer i matricen, der optræder i Ligning (11.1), begge forskellige fra nul. Derfor er den eneste løsning til Ligning (11.1), at $(v_1, v_2) = (0,0)$. Men egenvektorer må per definition ikke være lig med nulvektoren, så vi konkluderer, at der i dette tilfælde ikke findes nogen egenvektorer og derfor ej heller nogen egenværdier.

I tilfælde to antager vi, at $\lambda = -1$. I dette tilfælde har Ligning (11.1) løsninger på formen $(v_1, 0)$, hvor $v_1 \in \mathbb{R}$ kan vælges frit. Derfor er $\lambda = -1$ en egenværdi for den givne matrix $\mathbf{A}$. Som egenvektor kan vi vælge enhver vektor på formen $\begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \end{bmatrix}$, så længe $v_1 \neq 0$. For eksempel er $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ en egenvektor for den givne matrix $\mathbf{A}$ med egenværdi -1.

Slutteligt antager vi som det tredje og sidste tilfælde, at $\lambda = 2$. I dette tilfælde har Ligning (11.1) løsninger på formen $(0, v_2)$, hvor $v_2 \in \mathbb{R}$ kan vælges frit. Derfor er $\lambda = 2$ en egenværdi for den givne matrix $\mathbf{A}$. Som egenvektor kan vi vælge enhver vektor på formen $\begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \end{bmatrix}$, så længe $v_2 \neq 0$. For eksempel er $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ en egenvektor for den givne matrix $\mathbf{A}$ med egenværdi 2.

Også hvis V er et uendeligdimensionelt vektorrum, giver definitionen af egenvektorer og egenværdier mening. Vi ser på et eksempel af denne type.

Eksempel 11.1.2

Lad os betragte den lineære afbildning $D : \mathbb{C}[Z] \to \mathbb{C}[Z]$ defineret i Eksempel 10.2.1. Vi arbejder specifikt over legemet $\mathbb{C}$, da vi i Eksempel 10.2.1 opfattede $\mathbb{C}[Z]$ som et komplekst vektorrum. Afbildningen D blev defineret på den måde, at den sender et polynomium til sin afledte.

Spørgsmål: Hvad er egenværdierne for D? Find også en tilsvarende egenvektor for hver egenværdi.

Svar: Vi leder efter polynomier $p(Z)$ forskellige fra nulpolynomiet i $\mathbb{C}[Z]$ og skalarer $\lambda \in \mathbb{C}$, således at $D(p(Z)) = \lambda \cdot p(Z)$. Lad $p(Z) = a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2 + \cdots + a_n Z^n$ være et polynomium forskelligt fra nulpolynomiet. Da $D(a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2 + \cdots + a_n Z^n) = a_1 + 2a_2 Z + \cdots + n a_n Z^{n-1}$, vil graden af polynomiet $D(p(Z))$ typisk være én mindre end graden af polynomiet $p(Z)$ selv. Den eneste undtagelse er, hvis $p(Z) = a_0$, i hvilket tilfælde $D(p(Z)) = 0$. Derfor kan $D(p(Z)) = \lambda \cdot p(Z)$ kun opfyldes for konstante polynomier. Hvis $p(Z)$ er et konstant polynomium, så er $p(Z) = a_0$, og $D(a_0) = 0 = 0 \cdot a_0$. Dette viser, at 0 er den eneste egenværdi, som den lineære afbildning D har. Ethvert polynomium $p(Z) = a_0$ med $a_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ er en egenvektor for D med egenværdi 0. Grunden til at nulpolynomiet ikke er en egenvektor for D, er, at egenvektorer per definition skal være forskellige fra nulvektoren. Som dette eksempel viser, kan en egenværdi dog godt være nul.

De tidligere to eksempler kunne antyde, at en lineær afbildning altid har mindst én egenvektor, men det er ikke tilfældet. Lad os se på et eksempel, der viser det.

Eksempel 11.1.3

Rotationsafbildningen $R_{\pi/2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ fra Eksempel 10.2.4 blev defineret ved $R_{\pi/2}(v_1, v_2) = (-v_2, v_1)$.

Spørgsmål: Har den lineære afbildning $R_{\pi/2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nogen egenvektorer?

Svar: Lad os først give et intuitivt svar og derefter et, der anvender definitionerne mere direkte. Hvad den lineære afbildning $R_{\pi/2}$ gør geometrisk, er at tage en vektor som input og returnere vektoren roteret med $\pi/2$ radianer mod uret som output. Hvis en vektor forskellig fra nulvektoren er en egenvektor, vil en rotation med $\pi/2$ radianer skulle resultere i en skalering af inputvektoren. Dette er intuitivt ikke muligt, så vi vil forvente, at den lineære afbildning $R_{\pi/2}$ slet ikke har nogen egenvektorer.

Lad os bevise dette ved hjælp af definitionerne. Hvis afbildningen $R_{\pi/2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har egenvektorer, findes der $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ og $\lambda \in \mathbb{R}$, således at $R_{\pi/2}(v_1, v_2) = \lambda \cdot (v_1, v_2)$. Tilsvarende er $(-v_2, v_1) = (\lambda \cdot v_1, \lambda \cdot v_2)$, hvilket igen kan omskrives til de to ligninger $-\lambda v_1 - v_2 = 0$ og $v_1 - \lambda v_2 = 0$. Formuleret på matrixform får vi matrixligningen

$$\begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ved at lægge række to λ gange til række et får vi ligningen $-(1+\lambda^2)v_2 = 0$. Dette medfører, at $v_2 = 0$, da $\lambda^2 + 1$ ikke er nul for noget $\lambda \in \mathbb{R}$. Benyttes den anden række ser vi, at også $v_1 = 0$. Vi konkluderer, at $(v_1, v_2) = (0,0)$ er eneste løsning. Men en egenvektor må ikke være nulvektoren, så den lineære afbildning $R_{\pi/2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har derfor ingen egenvektorer.

Fremgangsmåden til at bestemme de mulige egenvektorer og egenværdier i de tidligere eksempler føltes en smule ad hoc. Heldigvis findes der en procedure, der altid virker, hvis V har en endelig dimension. Vi vil forklare denne procedure nu og lægger ud med egenværdier for en kvadratisk matrix.

Sætning 11.1.1

Lad $\mathbb{F}$ være et legeme og $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ en kvadratisk matrix. Da er $\lambda \in \mathbb{F}$ en egenværdi for $\mathbf{A}$, hvis og kun hvis $\det(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}_n) = 0$, hvor $\mathbf{I}_n$ betegner $n \times n$-identitetsmatricen.

Bevis. Hvis $\lambda \in \mathbb{F}$ er en egenværdi for matricen $\mathbf{A}$, så findes der en vektor forskellig fra nulvektoren $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$, således at $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}$. Da $\lambda \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot (\mathbf{I}_n \cdot \mathbf{v}) = (\lambda \cdot \mathbf{I}_n) \cdot \mathbf{v}$, ser vi, at ligningen $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}$ kan omskrives til $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = (\lambda \cdot \mathbf{I}_n)\mathbf{v}$, som igen kan omskrives til $(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}_n) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Dette viser, at det homogene system af lineære ligninger med koefficientmatrix $\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}_n$ har en løsning, der ikke er nulløsningen. Ved at bruge Korollar 8.3.6 på den kvadratiske matrix $\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}_n$, konkluderer vi, at $\det(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}_n) = 0$.

Omvendt, hvis $\det(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}_n) = 0$, medfører Korollar 8.3.6, at det homogene system af lineære ligninger med koefficientmatrix $\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}_n$ har en løsning, der ikke er nulløsningen. Enhver sådan løsning $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$, der ikke er nulløsningen, opfylder så $(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}_n) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Dette kan omskrives til $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}$. Derfor er $\mathbf{v}$ en egenvektor for $\mathbf{A}$ med egenværdi λ. □

For en given kvadratisk matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ er udtrykket $\det(\mathbf{A} - Z \cdot \mathbf{I}_n)$ et polynomium i $\mathbb{F}[Z]$ af grad n. Dette polynomium kaldes det *karakteristiske polynomium* for $\mathbf{A}$. Vi vil betegne det ved $p_{\mathbf{A}}(Z)$. Rødderne i dette polynomium i legemet $\mathbb{F}$ er netop alle egenværdierne for matricen $\mathbf{A}$.

Eksempel 11.1.4

Sætning 11.1.1 gør det muligt at beskrive alle egenværdier for en kvadratisk matrix. For eksempel har vi for matricen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2},$$

som vi betragtede i Eksempel 11.1.1, at

$$p_{\mathbf{A}}(Z) = \det(\mathbf{A} - Z \cdot \mathbf{I}_2) = \det\left(\begin{bmatrix} -1-Z & 0 \\ 0 & 2-Z \end{bmatrix}\right) = (-1-Z)\cdot(2-Z) = (Z+1)\cdot(Z-2).$$

Derfor er rødderne i det karakteristiske polynomium $p_{\mathbf{A}}(Z)$ netop -1 og 2. Dette betyder, at egenværdierne for matricen $\mathbf{A}$ er -1 og 2. Ser vi tilbage på Eksempel 11.1.1, kan vi gøre svaret, der blev givet dér, lidt kortere, da det første tilfælde, vi arbejdede på, ikke længere er nødvendigt. Dér behandlede vi nemlig i det første tilfælde alle λ, hvor $\lambda \neq -1$, og $\lambda \neq 2$, men vi ved nu, at der ikke findes nogen egenvektorer med sådanne egenværdier λ.

Eksempel 11.1.5

Som et andet eksempel vil vi betragte matricen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Vi så i Eksempel 10.3.3, at denne matrix repræsenterer den lineære afbildning $R_{\pi/2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, når den ordnede standardbasis vælges for $\mathbb{R}^2$. I det tilfælde er

$$p_{\mathbf{A}}(Z) = \det(\mathbf{A} - Z \cdot \mathbf{I}_2) = \det\left(\begin{bmatrix} -Z & -1 \\ 1 & -Z \end{bmatrix}\right) = Z^2 + 1.$$

Da vi arbejder over de reelle tal $\mathbb{R}$, og polynomiet $Z^2 + 1$ ingen rødder har i $\mathbb{R}$, konkluderer vi, at matricen $\mathbf{A}$, når den betragtes over $\mathbb{R}$, ikke har nogen egenværdier og derfor heller ikke har nogen egenvektorer.

Nu hvor vi ved, hvordan man finder egenværdier for en kvadratisk matrix, er det naturligt at spørge, hvordan man finder egenvektorer. Vi vil vende tilbage til det spørgsmål i det næste afsnit. I resten af dette afsnit vil vi forklare, hvordan man finder egenværdier for en vilkårlig lineær afbildning $L : V \to V$, hvis V er et endeligdimensionelt vektorrum.

Sætning 11.1.2

Lad $\mathbb{F}$ være et legeme, V et vektorrum over $\mathbb{F}$ af dimension n og $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ en ordnet basis for V. Da er $\lambda \in \mathbb{F}$ en egenværdi for en lineær afbildning $L : V \to V$, hvis og kun hvis $\det({}_\beta[L]_\beta - \lambda \cdot \mathbf{I}_n) = 0$.

Bevis. Hvis $\lambda \in \mathbb{F}$ er en egenværdi for den lineære afbildning $L : V \to V$, så findes der en vektor $\mathbf{v} \in V$ forskellig fra nulvektoren, således at $L(\mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{v}$. Derfor har vi jævnfør det første punkt i Sætning 10.3.4, at ${}_\beta[L]_\beta \cdot [\mathbf{v}]_\beta = [L(\mathbf{v})]_\beta = [\lambda \cdot \mathbf{v}]_\beta$. Ved at anvende Lemma 9.2.2 har vi $[\lambda \cdot \mathbf{v}]_\beta = \lambda \cdot [\mathbf{v}]_\beta$. Ved at kombinere disse to ligninger, får vi, at ${}_\beta[L]_\beta \cdot [(\mathbf{v})]_\beta = \lambda \cdot [\mathbf{v}]_\beta$. Derfor er $[\mathbf{v}]_\beta$ en egenvektor for matricen ${}_\beta[L]_\beta$ med egenværdi λ.

Antag omvendt, at $\det({}_\beta[L]_\beta - \lambda \cdot \mathbf{I}_n) = 0$ for en $\lambda \in \mathbb{F}$. Så er λ ifølge Sætning 11.1.1 en egenværdi for matricen ${}_\beta[L]_\beta$. Derfor findes der en vektor forskellig fra nulvektoren $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{F}^n$, som er en egenvektor for matricen ${}_\beta[L]_\beta$ med egenværdi λ. Definerer vi nu $\mathbf{v} = c_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + c_n \cdot \mathbf{v}_n \in V$, så er $\mathbf{c} = [\mathbf{v}]_\beta$. Derfor har vi ${}_\beta[L]_\beta \cdot [(\mathbf{v})]_\beta = \lambda \cdot [\mathbf{v}]_\beta$, hvilket medfører $[L(\mathbf{v})]_\beta = \lambda \cdot [\mathbf{v}]_\beta = [\lambda \cdot \mathbf{v}]_\beta$. Dette medfører, at $L(\mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{v}$. Derfor er λ en egenværdi for den lineære afbildning $L : V \to V$. $\square$

Denne sætning viser, at hvis V er et endeligdimensionelt vektorrum, så kan vi reducere udregningen af egenværdier for en lineær afbildning $L : V \to V$ til udregningen af egenværdierne for den kvadratiske matrix ${}_\beta[L]_\beta$, der repræsenterer den lineære afbildning. Her betyder det ikke noget, hvilken ordnet basis for V man vælger. Til fremtidig brug vil vi dog alligevel undersøge effekten på matricen, der repræsenterer L, af at vælge en anden ordnet basis. Her vil koordinatskiftematricerne introduceret i Ligning (10.5) spille en vigtig rolle.

Lemma 11.1.3

Lad $\mathbb{F}$ være et legeme, V et vektorrum over $\mathbb{F}$ af dimension n og $L : V \to V$ en lineær afbildning. Lad derudover β og γ være to ordnede baser for V, og betegn ved $\mathrm{id}_V : V \to V$ identitetsafbildningen $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}$. Da gælder der, at

$$ {}_\gamma[L]_\gamma = ({}_\beta[\mathrm{id}_V]_\gamma)^{-1} \cdot {}_\beta[L]_\beta \cdot {}_\beta[\mathrm{id}_V]_\gamma. $$

Bevis. Vi ved fra Lemma 10.3.5, at $({}_\beta[\mathrm{id}_V]_\gamma)^{-1} = {}_\gamma[\mathrm{id}_V]_\beta$. Derfor er

$$ \begin{aligned} ({}_\beta[\mathrm{id}_V]_\gamma)^{-1} \cdot {}_\beta[L]_\beta \cdot {}_\beta[\mathrm{id}_V]_\gamma &= {}_\gamma[\mathrm{id}_V]_\beta \cdot {}_\beta[L]_\beta \cdot {}_\beta[\mathrm{id}_V]_\gamma \\ &= {}_\gamma[\mathrm{id}_V]_\beta \cdot {}_\beta[L \circ \mathrm{id}_V]_\gamma \\ &= {}_\gamma[\mathrm{id}_V \circ L \circ \mathrm{id}_V]_\gamma \\ &= {}_\gamma[L]_\gamma. \end{aligned} $$

I den anden og tredje lighed benyttede vi første punkt fra Sætning 10.3.4. □

To kvadratiske matricer $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ og $\mathbf{B} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ kaldes *similære*, hvis der findes en invertibel matrix $\mathbf{Q} \in \mathbb{F}^{n\times n}$, således at $\mathbf{A} = \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}$. Derfor kan Lemma 11.1.3 omskrives med ord som følger: effekten af at vælge en anden ordnet basis for V er, at matricen, der repræsenterer L, erstattes af en similær matrix. Det viser sig, at dette lemma også forklarer, hvorfor det ikke betyder noget, hvilken ordnet basis man vælger, når man udregner egenværdierne for en lineær afbildning. Faktisk har vi følgende:

Sætning 11.1.4

Lad $\mathbb{F}$ være et legeme, V et vektorrum over $\mathbb{F}$ af dimension n og $L : V \to V$ en lineær afbildning. Lad yderligere β og γ være to ordnede baser for V. Da er de karakteristiske polynomier for ${}_\beta[L]_\beta$ og ${}_\gamma[L]_\gamma$ identiske.

Bevis. Lad os for nemheds skyld skrive $\mathbf{Q} = {}_\beta[\mathrm{id}_V]_\gamma$. Ved at anvende Lemma 11.1.3 ser vi, at:

$$ \begin{aligned} p_{{}_\gamma[L]_\gamma}(Z) &= \det({}_\gamma[L]_\gamma - Z \cdot \mathbf{I}_n) \\ &= \det(\mathbf{Q}^{-1} \cdot {}_\beta[L]_\beta \cdot \mathbf{Q} - Z \cdot \mathbf{I}_n) \\ &= \det(\mathbf{Q}^{-1} \cdot {}_\beta[L]_\beta \cdot \mathbf{Q} - Z \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{Q}) \\ &= \det(\mathbf{Q}^{-1} \cdot {}_\beta[L]_\beta \cdot \mathbf{Q} - Z \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{I}_n \cdot \mathbf{Q}) \\ &= \det(\mathbf{Q}^{-1} \cdot ({}_\beta[L]_\beta - Z \cdot \mathbf{I}_n) \cdot \mathbf{Q}). \end{aligned} $$

Herefter kommer Sætning 8.3.3 til hjælp. Ved brug af denne sætning kan vi nemlig fortsætte som følger:

$$\begin{aligned} p_{\gamma[L]_\gamma}(Z) &= \det(\mathbf{Q}^{-1} \cdot ({}_\beta[L]_\beta - Z \cdot \mathbf{I}_n) \cdot \mathbf{Q}) \\ &= \det(\mathbf{Q}^{-1}) \cdot \det({}_\beta[L]_\beta - Z \cdot \mathbf{I}_n) \cdot \det(\mathbf{Q}) \\ &= \det(\mathbf{Q}^{-1}) \cdot \det(\mathbf{Q}) \cdot \det({}_\beta[L]_\beta - Z \cdot \mathbf{I}_n) \\ &= \det(\mathbf{Q})^{-1} \cdot \det(\mathbf{Q}) \cdot \det({}_\beta[L]_\beta - Z \cdot \mathbf{I}_n) \\ &= 1 \cdot \det({}_\beta[L]_\beta - Z \cdot \mathbf{I}_n) \\ &= \det({}_\beta[L]_\beta - Z \cdot \mathbf{I}_n) \\ &= p_{\beta[L]_\beta}(Z). \end{aligned}$$

Dette er netop, hvad vi skulle vise. □

Korollar 11.1.5

Med samme notation som før er $\det {}_\beta[L]_\beta = \det {}_\gamma[L]_\gamma$.

Bevis. Dette følger ved at indsætte $Z = 0$ i de karakteristiske polynomier $p_{\beta[L]_\beta}(Z)$ og $p_{\gamma[L]_\gamma}(Z)$. □

Vi kan nu definere det karakteristiske polynomium for en lineær afbildning $L : V \to V$, så længe V er et endeligdimensionelt vektorrum.

Definition 11.1.3

Lad $\mathbb{F}$ være et legeme, V et vektorrum over $\mathbb{F}$ af endelig dimension n og $L : V \to V$ en lineær afbildning. Da defineres *det karakteristiske polynomium* som polynomiet $p_L(Z) = \det({}_\beta[L]_\beta - Z \cdot \mathbf{I}_n) \in \mathbb{F}[Z]$, hvor β er en ordnet basis for V.

Grunden til, at denne definition giver mening, er, at valget af den ordnede basis β ifølge Sætning 11.1.4 ikke betyder noget: et andet valg vil ikke ændre det tilsvarende karakteristiske polynomium. På en lignende måde kan man, baseret på Korollar 11.1.5, definere determinanten af en sådan lineær afbildning: $\det L = \det {}_\beta[L]_\beta$.

Eksempel 11.1.6

Som et eksempel vil vi betragte en lineær afbildning, der ligner den lineære afbildning $D : \mathbb{C}[Z] \to \mathbb{C}[Z]$ fra Eksempel 10.2.1. Dog er $\mathbb{C}[Z]$ et uendeligdimensionelt vektorrum, så vi justerer først definitionsmængden og dispositionsmængden for afbildningen en smule. Lader vi V være det komplekse vektorrum af polynomier af grad højst tre, kan vi definere $\tilde{D} : V \to V$ som $p(Z) \mapsto p(Z)'$.

Spørgsmål: Hvad er det karakteristiske polynomium $p_{\tilde{D}}(\lambda)$ for den lineære afbildning $\tilde{D}$?

Svar: Lad os vælge den ordnede basis $\beta = (1, Z, Z^2, Z^3)$ for V. Da $\tilde{D}(1) = 0, \tilde{D}(Z) =$

$1, \tilde{D}(Z^2) = 2Z$, og $\tilde{D}(Z^3) = 3Z^2$, ser vi, at

$$_\beta[\tilde{D}]_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{og derfor} \quad {}_\beta[\tilde{D}]_\beta - Z \cdot \mathbf{I}_4 = \begin{bmatrix} -Z & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -Z & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -Z & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -Z \end{bmatrix}.$$

Vi ser, at $_\beta[\tilde{D}]_\beta - Z \cdot \mathbf{I}_4$ er en øvre trekantsmatrix (se Definition 8.1.4). Dette betyder, at dens determinant simpelthen er produktet af elementerne i dens diagonal, se Sætning 8.1.2. Derfor er $\tilde{D}$'s karakteristiske polynomium $p_{\tilde{D}}(Z) = (-Z)^4 = Z^4$.

11.2 Egenrum

Indtil videre har vi hovedsageligt fokuseret på, hvordan man finder en matrix', henholdsvis en lineær afbildnings, egenværdier. I dette afsnit vil vi fokusere på at finde alle de mulige egenvektorer, der har en given egenværdi.

Sætning 11.2.1

Lad $\mathbb{F}$ være et legeme, V et vektorrum over $\mathbb{F}$ af endelig dimension n og $L : V \to V$ en lineær afbildning. Antag, at $\lambda \in \mathbb{F}$ er en egenværdi for L. Da er mængden

$$E_\lambda = \{\mathbf{v} \in V \mid L(\mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{v}\}$$

et underrum i V.

Bevis. Lad $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E_\lambda$ og $c \in \mathbb{F}$. Ifølge Lemma 9.3.2 kan vi konkludere, at E_λ er et underrum i V, hvis vi kan vise, at $\mathbf{u} + c \cdot \mathbf{v} \in E_\lambda$. Bemærk nu, at

$$L(\mathbf{u} + c \cdot \mathbf{v}) = L(\mathbf{u}) + c \cdot L(\mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{u} + c \cdot \lambda \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot (\mathbf{u} + c \cdot \mathbf{v}).$$

Derfor er $\mathbf{u} + c \cdot \mathbf{v} \in E_\lambda$, hvilket var det, vi skulle vise. □

For kvadratiske matricer har denne sætning en direkte konsekvens.

Korollar 11.2.2

Lad $\mathbb{F}$ være et legeme og $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ en kvadratisk matrix. Antag, at $\lambda \in \mathbb{F}$ er en egenværdi for $\mathbf{A}$. Da er mængden $E_\lambda = \{\mathbf{v} \in V \mid \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}\}$ et underrum i $\mathbb{F}^n$.

Bevis. Dette følger af Sætning 11.2.1 anvendt på den lineære afbildning $L_\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$, $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$. □

For en given lineær afbildning $L : V \to V$ i et endeligdimensionelt vektorrum V, hvor λ er en egenværdi for L, kaldes underrummet E_λ for *egenrummet svarende til egenværdien* λ for den lineære afbildning L. Ligeledes, for en given kvadratisk matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ kaldes underrummet E_λ for egenrummet svarende til egenværdien λ for matricen $\mathbf{A}$. Bemærk, at det tilsvarende engelske begreb er *eigenspace*.

Nu hvor vi ved, at mængden af alle egenvektorer tilhørende en given egenværdi λ sammen med nulvektoren danner et underrum E_λ, kan vi beskrive alle de egenvektorer, der eksisterer for en given egenværdi, ved at angive en basis for dette underrum E_λ. Heldigvis viser dette sig at være endnu en anvendelse af teorien om systemer af lineære ligninger. Først og fremmest har vi:

Lemma 11.2.3

Lad $L : V \to V$ være en lineær afbildning mellem vektorrum over et legeme $\mathbb{F}$, og antag, at $\dim V = n$. Antag videre, at $\lambda \in \mathbb{F}$ er en egenværdi til L. Da gælder der, at $E_\lambda = \ker(L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)$. Tilsvarende hvis $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ er en matrix, og $\lambda \in \mathbb{F}$ er en egenværdi for $\mathbf{A}$, da er $E_\lambda = \ker(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}_n)$.

Bevis. Per definition har vi $\mathbf{v} \in E_\lambda$, hvis og kun hvis $L(\mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{v}$. Bemærk, at $L(\mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{v}$, hvis og kun hvis $(L - \lambda \cdot \mathrm{id}_n)(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, hvilket igen er ækvivalent med at sige, at $\mathbf{v} \in \ker(L - \lambda \cdot \mathbf{I}_n)$. Anden del af lemmaet, der involverer matricen $\mathbf{A}$, kan bevises på samme måde. $\square$

Som vi har set tidligere, svarer dét at bestemme vektorer i kernen af en matrix $\mathbf{B}$ med dét at finde løsninger til et homogent system af lineære ligninger med koefficientmatrix $\mathbf{B}$. Desuden ved vi allerede, hvordan man bestemmer en basis for løsningsrummet til et homogent system af lineære ligninger ved hjælp af Korollar 9.3.4 og Sætning 6.4.4. Derfor behøver vi ikke at udvikle nye værktøjer for at kunne bestemme en basis for egenrummet E_λ for en matrix. Heller ikke når vi beskæftiger os med den tilsvarende problemstilling for lineære afbildninger, behøver vi nye værktøjer: Sætning 10.4.2 medfører, at vi kan bestemme kernen af en lineær afbildning $L : V \to V$ ved at bestemme kernen af en matrix ${}_\beta[L]_\beta$, der repræsenterer den lineære afbildning, hvor β er en ordnet basis for V. Vi er altså allerede i stand til at finde egenvektorer i alle tilfælde. Lad os illustrere dette i to eksempler.

Eksempel 11.2.1

Lad os først betragte matricen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}.$$

Vi har stødt på denne matrix før i Eksempel 11.1.5, men bemærk en væsentlig forskel denne gang: i dette eksempel arbejder vi over de komplekse tal $\mathbb{C}$, da matricen er defineret som et element i $\mathbb{C}^{2\times 2}$ fremfor som et element i $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Som i Eksempel 11.1.5 har vi, at

$$p_{\mathbf{A}}(Z) = \det(\mathbf{A} - Z \cdot \mathbf{I}_2) = \det\left(\begin{bmatrix} -Z & -1 \\ 1 & -Z \end{bmatrix}\right) = Z^2 + 1.$$

Da vi arbejder over legemet $\mathbb{C}$, har polynomiet $Z^2 + 1$ to rødder, nemlig i og $-i$.

Spørgsmål: Find en basis for egenrummet E_i.

Svar: Vi ved fra Lemma 11.2.3, at $E_i = \ker(\mathbf{A} - i \cdot \mathbf{I}_2)$. Vi har

$$\mathbf{A} - i \cdot \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}.$$

For at bestemme kernen af denne matrix, bringer vi den på reduceret trappeform:

$$\begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \leftarrow R_2 - i \cdot R_1]{} \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1 \leftarrow i \cdot R_1]{} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dette viser, at $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \ker(\mathbf{A} - i \cdot \mathbf{I}_2)$, hvis og kun hvis $v_1 = i \cdot v_2$. Derfor har vi:

$$E_i = \ker(\mathbf{A} - i \cdot \mathbf{I}_2) = \left\{ c \cdot \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \mid c \in \mathbb{C} \right\}.$$

En basis for E_i er derfor givet ved

$$\left\{ \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Dette besvarer spørgsmålet. På en lignende måde kan man vise, at en basis for E_{-i} er givet ved

$$\left\{ \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Eksempel 11.2.2

Lad os genbesøge den lineære afbildning $\tilde{D} : V \to V$ introduceret i Eksempel 11.1.6. I det eksempel var V det komplekse vektorrum af polynomier af højst tredje grad, og $\tilde{D} : V \to V$ blev defineret ved $p(Z) \mapsto p(Z)'$. Vi har allerede set i Eksempel 11.1.6, at $p_{\tilde{D}}(Z) = Z^4$. Derfor har $\tilde{D}$ kun én egenværdi, nemlig 0.

Spørgsmål: Find en basis for egenrummet E_0.

Svar: Vi ved fra Lemma 11.2.3, at $E_0 = \ker(\tilde{D} - 0 \cdot \mathrm{id}_V) = \ker \tilde{D}$. For at finde en basis for $\ker \tilde{D}$ bestemmer vi først kernen af den matrix ${}_\beta[\tilde{D}]_\beta \in \mathbb{C}^{4\times 4}$, der repræsenterer $\tilde{D}$. Lad os vælge den ordnede basis $\beta = (1, Z, Z^2, Z^3)$ for V. Vi har allerede set i Eksempel 11.1.6, at vi i dette tilfælde har:

$$_\beta[\tilde{D}]_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Denne matrix er allerede på trappeform, og vi kan direkte aflæse, at $(v_1, v_2, v_3, v_4) \in \ker {}_\beta[\tilde{D}]_\beta$, hvis og kun hvis $v_2 = 0$, og $v_3 = 0$, og $v_4 = 0$. Derfor,

$$\ker {}_\beta[\tilde{D}]_\beta = \left\{ c \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mid c \in \mathbb{C} \right\}.$$

Vi ser, at en basis for $\ker {}_\beta[\tilde{D}]_\beta$ er givet ved

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Basisvektoren $(1, 0, 0, 0)$ svarer til polynomiet $1 \cdot 1 + 0 \cdot Z + 0 \cdot Z^2 + 0 \cdot Z^3 = 1$. Derfor ser vi ved hjælp af Sætning 10.4.2, at

$$E_0 = \ker \tilde{D} = \{c \cdot 1 \mid c \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C},$$

og at en basis for E_0 er givet ved $\{1\}$.

Lad os afslutte dette afsnit med en teoretisk overvejelse om egenvektorer, der vil blive meget vigtig senere. Vi starter med en definition.

Definition 11.2.1

Lad $\mathbb{F}$ være et legeme, V et endeligdimensionelt vektorrum og $L : V \to V$ en lineær afbildning. Antag, at $\lambda \in \mathbb{F}$ er en egenværdi for L. Da defineres *algebraisk multiplicitet* $\mathrm{am}(\lambda)$ af egenværdien λ som multipliciteten af λ som rod i det karakteristiske polynomium $p_L(Z)$ for L. Yderligere defineres *geometrisk multiplicitet* $\mathrm{gm}(\lambda)$ af egenværdien λ som dimensionen af E_λ.

Ligeledes defineres for en egenværdi $\lambda \in \mathbb{F}$ for en kvadratisk matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ $\mathrm{am}(\lambda)$ som multipliciteten af λ som rod i det karakteristiske polynomium $p_{\mathbf{A}}(Z)$ for $\mathbf{A}$, og $\mathrm{gm}(\lambda) = \dim E_\lambda$.

Eksempel 11.2.3

I Eksempel 11.2.1 er egenværdien i en rod med multiplicitet 1 i det karakteristiske polynomium

$p_{\mathbf{A}}(Z) = Z^2 + 1$. Derfor er $\mathrm{am}(i) = 1$. I det eksempel så vi også, at E_i er et vektorrum med dimension én. Derfor er $\mathrm{gm}(i) = 1$.

Eksempel 11.2.4

I Eksempel 11.2.2 er egenværdien 0 en rod med multiplicitet 4 i det karakteristiske polynomium $p_{\tilde{D}}(Z) = Z^4$. Derfor er $\mathrm{am}(0) = 4$. I det eksempel så vi også, at E_0 er et vektorrum med dimension én. Derfor er $\mathrm{gm}(0) = 1$ i dette tilfælde.

Som det sidste eksempel viser, behøver den algebraiske og den geometriske multiplicitet af en egenværdi ikke at være ens. Vi har dog følgende sætning, der siger, at $1 \leq \mathrm{gm}(\lambda) \leq \mathrm{am}(\lambda)$. En læser, der er villig til at acceptere dette udsagn, kan fortsætte til næste afsnit.

Sætning 11.2.4

Lad $\mathbb{F}$ være et legeme. Lad $\lambda \in \mathbb{F}$ være en egenværdi for en lineær afbildning $L : V \to V$ med $\dim V = n < \infty$ eller en egenværdi for en kvadratisk matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Da gælder der, at $1 \leq \mathrm{gm}(\lambda) \leq \mathrm{am}(\lambda) \leq n$.

Bevis. Hvis λ er en egenværdi, findes der per definition mindst én tilhørende egenvektor. Derfor er $\mathrm{gm}(\lambda) = \dim E_\lambda \geq 1$.

Lad os for en egenværdi λ skrive $s = \mathrm{gm}(\lambda)$ for nemheds skyld. Vi vil bevise sætningen i et tilfælde, hvor λ er en egenværdi for en lineær afbildning $L : V \to V$ alene, da tilfældet med en matrix $\mathbf{A}$ følger ved at overveje den lineære afbildning $L_{\mathbf{A}} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$. Da $\dim E_\lambda = \mathrm{gm}(\lambda) = s$, indeholder enhver basis for E_λ præcis s vektorer. Lad os vælge en sådan basis, for eksempel $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s\}$. Vælg nu vektorer $\mathbf{v}_{s+1}, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$, således at $\beta = \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s, \mathbf{v}_{s+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ er en ordnet basis for V. Da $L(\mathbf{v}_i) = \lambda \cdot \mathbf{v}_i$ for alle i mellem 1 og s, har vi

$${}_\beta[L]_\beta = \begin{bmatrix} \lambda \cdot \mathbf{I}_s & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$$

for nogle matricer $\mathbf{B} \in \mathbb{F}^{s\times(n-s)}$ og $\mathbf{D} \in \mathbb{F}^{(n-s)\times(n-s)}$, hvor $\mathbf{0}$ betegner en $(n-s) \times s$-nulmatrix. Så har vi

$${}_\beta[L]_\beta - Z \cdot \mathbf{I}_n = \begin{bmatrix} (\lambda - Z) \cdot \mathbf{I}_s & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} - Z \cdot \mathbf{I}_{n-s} \end{bmatrix},$$

og derfor

$$\begin{aligned} p_L(Z) &= \det({}_\beta[L]_\beta - Z \cdot \mathbf{I}_n) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} (\lambda - Z) \cdot \mathbf{I}_s & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} - Z \cdot \mathbf{I}_{n-s} \end{bmatrix}\right) \\ &= (\lambda - Z)^s \cdot \det(\mathbf{D} - Z \cdot \mathbf{I}_{n-s}). \end{aligned}$$

I den sidste lighed anvendte vi induktion på s og udviklede determinanten fra den første søjle for at bevise induktionens basistrin samt for at udføre induktionstrinnet. Nu er det klart, at multipliciteten af λ i $p_L(Z)$ er mindst s. Med andre ord: $\mathrm{am}(\lambda) \geq s = \mathrm{gm}(\lambda)$, hvilket er præcis, hvad vi ønskede at vise. Den sidste ulighed $\mathrm{am}(\lambda) \leq n$ følger, da $\mathrm{am}(\lambda)$ er multipliciteten af roden λ i polynomiet $p_L(Z)$, og $\deg p_L(Z) = n$. $\square$

11.3 Diagonalisering

I dette afsnit undersøger vi, hvornår en lineær afbildning kan repræsenteres ved en særligt flot matrix: en diagonalmatrix. Vi vil nemlig undersøge, hvornår en lineær afbildning har en diagonalmatrix som afbildningsmatrix. For at opnå dette skal vi kunne vælge en særligt flot ordnet basis. Derfor starter vi med et lemma.

Lemma 11.3.1

Lad $\mathbb{F}$ være et legeme, V et endeligdimensionelt vektorrum over $\mathbb{F}$ og $L : V \to V$ en lineær afbildning. Yderligere antages det, at $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{F}$ er forskellige egenværdier for L, og der benyttes notationen $d_i = \mathrm{gm}(\lambda_i)$ for $i = 1, \ldots, r$. Hvis $(\mathbf{v}_1^{(i)}, \ldots, \mathbf{v}_{d_i}^{(i)})$ for $i = 1, \ldots, r$ er ordnede baser for E_{λ_i}, da er vektorerne

$$\mathbf{v}_1^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}_{d_1}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}_1^{(r)}, \ldots, \mathbf{v}_{d_r}^{(r)}$$

lineært uafhængige.

Bevis. Vi vil bevise lemmaet ved hjælp af induktion på r.

Hvis $r = 1$, er der intet at bevise, da vi antager, at $(\mathbf{v}_1^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}_{d_1}^{(1)})$ er en ordnet basis for E_{λ_1}. Så er vektorerne $\mathbf{v}_1^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}_{d_1}^{(1)}$ selvfølgelig lineært uafhængige. Lad nu $r > 1$, og antag som induktionshypotese, at lemmaet er korrekt, hvis der er $r - 1$ forskellige egenværdier. Antag, at

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{d_i} \alpha_{i,j} \cdot \mathbf{v}_j^{(i)} = \mathbf{0} \tag{11.2}$$

for nogle $\alpha_{i,j} \in \mathbb{F}$. Vi skal vise, at $\alpha_{i,j} = 0$ for alle $i = 1, \ldots, r$ og $j = 1, \ldots, d_i$. Ved at anvende den lineære afbildning L på denne ligning og udnytte, at $L(\mathbf{v}_j^{(i)}) = \lambda_i \cdot \mathbf{v}_j^{(i)}$, ser vi, at $\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{d_i} \alpha_{i,j} \cdot \lambda_i \cdot \mathbf{v}_j^{(i)} = \mathbf{0}$, hvilket kan omskrives til

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot \sum_{j=1}^{d_i} \alpha_{i,j} \cdot \mathbf{v}_j^{(i)} = \mathbf{0}. \tag{11.3}$$

Ganges Ligning (11.2) med λ_r, og trækkes Ligning (11.3) fra resultatet, udgår leddet svarende til $i = r$, mens højresiden stadig er $\mathbf{0}$. Med andre ord:

$$\lambda_r \cdot \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{d_i} \alpha_{i,j} \cdot \mathbf{v}_j^{(i)} - \sum_{i=1}^{r-1} \lambda_i \cdot \sum_{j=1}^{d_i} \alpha_{i,j} \cdot \mathbf{v}_j^{(i)} = \lambda_r \cdot \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{d_i} \alpha_{i,j} \cdot \mathbf{v}_j^{(i)} - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot \sum_{j=1}^{d_i} \alpha_{i,j} \cdot \mathbf{v}_j^{(i)} = \mathbf{0}.$$

Ved at kombinere de to første summer til én, får vi:

$$\sum_{i=1}^{r-1}\sum_{j=1}^{d_i}(\lambda_r-\lambda_i)\cdot\alpha_{i,j}\cdot\mathbf{v}_j^{(i)}=\sum_{i=1}^{r-1}(\lambda_r-\lambda_i)\cdot\sum_{j=1}^{d_i}\alpha_{i,j}\cdot\mathbf{v}_j^{(i)}=\mathbf{0}.$$

Nu kan vi anvende induktionshypotesen og konkludere, at $(\lambda_r-\lambda_i)\cdot\alpha_{i,j}=0$ for $i=1,\ldots,r-1$ og $j=1,\ldots,d_i$. Da vi antog, at alle egenværdier er forskellige, ser vi, at $\lambda_r-\lambda_i\neq 0$ for alle i mellem 1 og $r-1$. Derfor er $\alpha_{i,j}=0$ for $i=1,\ldots,r-1$ og $j=1,\ldots,d_i$. Ved at indsætte dette i Ligning (11.2), får vi, at $\sum_{j=1}^{d_r}\alpha_{r,j}\cdot\mathbf{v}_j^{(r)}=\mathbf{0}$, og så kan vi også konkludere, at $\alpha_{r,j}=0$ for $j=1,\ldots d_r$, da vi antog, at $(\mathbf{v}_1^{(r)},\ldots,\mathbf{v}_{d_r}^{(r)})$ er en ordnet basis for E_{λ_r}. Dette fuldfører induktionstrinnet. Derfor kan vi ved induktionsprincippet konkludere, at lemmaet gælder for alle r. □

Som vi har set tidligere, skal der vælges en ordnet basis β for V, før en lineær afbildning $L:V\to V$ kan repræsenteres ved en matrix ${}_\beta[L]_\beta$. Vektorerne i Lemma 11.3.1 er lineært uafhængige, hvilket er en god start, men de kan ikke nødvendigvis udspænde hele rummet V. Det næste lemma afklarer, hvornår egenvektorerne udspænder V.

Lemma 11.3.2

Lad $\mathbb{F}$ være et legeme, V et vektorrum over $\mathbb{F}$ med dimension n og $L:V\to V$ en lineær afbildning. Da er følgende to udsagn ækvivalente:

(i) Egenvektorerne tilhørende L udspænder V.

(ii) Det karakteristiske polynomium for L er på formen

$$p_L(Z)=(-1)^n\cdot(Z-\lambda_1)^{m_1}\cdots(Z-\lambda_r)^{m_r}$$

for nogle $\lambda_1,\ldots,\lambda_r\in\mathbb{F}$ og positive heltal $m_1,\ldots,m_r$. Yderligere er de algebraiske og geometriske multipliciteter ens for enhver egenværdi λ_i, altså $\mathrm{am}(\lambda_i)=\mathrm{gm}(\lambda_i)$ for $i=1,\ldots,r$.

Bevis. For at vise, at de to punkter er logisk ækvivalente, viser vi først (i) ⇒ (ii) og derefter (ii) ⇒ (i).

(i) ⇒ (ii): antag, at egenvektorerne for L udspænder V. Da kan vi finde en basis S for V, der kun består af egenvektorer. Lad $\lambda_1,\ldots,\lambda_r\in\mathbb{F}$ være egenværdierne for L, og sortér egenvektorerne i S, således at egenvektorerne med egenværdi λ_1 kommer først, derefter dem med egenværdi λ_2 og så videre, afsluttende med egenvektorerne i S med egenværdi λ_r. Vi har så konstrueret en ordnet basis

$$\beta=(\mathbf{v}_1^{(1)},\ldots,\mathbf{v}_{n_1}^{(1)},\ldots,\mathbf{v}_1^{(r)},\ldots,\mathbf{v}_{n_r}^{(r)}),$$

hvor vektorerne $\mathbf{v}_1^{(i)},\ldots,\mathbf{v}_{n_i}^{(i)}$ for $i=1,\ldots,r$ er egenvektorerne i S med egenværdi λ_i.

Nu har vi på den ene side $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$, da antallet af vektorer i den ordnede basis β er det samme som dimensionen af V. På den anden side har vi for alle i, at $n_i \leq \mathrm{gm}(\lambda_i)$, da $\mathbf{v}_1^{(i)}, \ldots, \mathbf{v}_{n_i}^{(i)}$ er lineært uafhængige vektorer i E_{λ_i}, og $\dim E_{\lambda_i} = \mathrm{gm}(\lambda_i)$. Derfor har vi:

$$\begin{aligned} n &= n_1 + \cdots + n_r \\ &\leq \mathrm{gm}(\lambda_1) + \cdots + \mathrm{gm}(\lambda_r) \\ &\leq \mathrm{am}(\lambda_1) + \cdots + \mathrm{am}(\lambda_r) \\ &\leq \deg p_L(Z) \\ &= n. \end{aligned}$$

Da vi både startede og sluttede med n, skal alle uligheder være ligheder. Dette viser, at $\mathrm{gm}(\lambda_i) = \mathrm{am}(\lambda_i)$ for alle $i = 1, \ldots, r$, og at $p_L(Z)$ er på den form, der er angivet i punkt (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i): antag nu, at $p_L(Z) = (-1)^n \cdot (Z - \lambda_1)^{m_1} \cdots (Z - \lambda_r)^{m_r}$ for nogle forskellige $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{F}$ og for positive heltal $m_1, \ldots, m_r$, hvor $\mathrm{am}(\lambda_i) = \mathrm{gm}(\lambda_i)$ for alle $i = 1, \ldots, r$. Bemærk, at vi per definition har $m_i = \mathrm{am}(\lambda_i)$, hvilket igen medfører, at $m_i = \mathrm{gm}(\lambda_i)$, da vi antager, at $\mathrm{am}(\lambda_i) = \mathrm{gm}(\lambda_i)$ for alle i. Vi konkluderer, at $n = \deg p_L(Z) = \mathrm{gm}(\lambda_1) + \cdots + \mathrm{gm}(\lambda_r)$. På den anden side kan vi ifølge Lemma 11.3.1 finde præcis $\mathrm{gm}(\lambda_1) + \cdots + \mathrm{gm}(\lambda_r)$ lineært uafhængige egenvektorer for L. Ved at kombinere disse udsagn kan vi konkludere, at vi kan finde en ordnet basis for V, der består af egenvektorer. Disse egenvektorerne udspænder V, hvilket er det, vi ønskede at vise. $\square$

Nu er vi klar til at vise hovedresultatet af dette Afsnit.

Definition 11.3.1

Lad en lineær afbildning $L : V \to V$ være givet, hvor V er et endeligdimensionelt vektorrum over et legeme $\mathbb{F}$. Da siger man, at L kan *diagonaliseres*, hvis der findes en ordnet basis β for V, således at den tilsvarende afbildningsmatrix ${}_\beta[L]_\beta$ er en diagonalmatrix. Ligeledes, hvis $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ er en kvadratisk matrix, så siger man, at $\mathbf{A}$ kan diagonaliseres, hvis $\mathbf{A}$ er similær med en diagonalmatrix.

Sætning 11.3.3

Lad V være et endeligdimensionelt vektorrum over et legeme $\mathbb{F}$. En lineær afbildning $L : V \to V$ kan diagonaliseres, hvis og kun hvis det karakteristiske polynomium for L er på formen $p_L(Z) = (-1)^n \cdot (Z - \lambda_1)^{m_1} \cdots (Z - \lambda_r)^{m_r}$ for nogle $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{F}$, og $\mathrm{am}(\lambda_i) = \mathrm{gm}(\lambda_i)$ for enhver egenværdi λ_i.

Bevis. Ved at bruge Lemma 11.3.2 er det nok at vise, at L kan diagonaliseres, hvis og kun hvis dens egenvektorer udspænder V.

Derfor antager vi først, at L kan diagonaliseres. Da findes der en ordnet basis β for V, således at ${}_\beta[L]_\beta$ er en diagonalmatrix. Men dette medfører, at enhver vektor i β er en egenvektor. Derfor kan V udspændes af egenvektorer.

Antag omvendt, at V kan udspændes af egenvektorer. Da findes der en ordnet basis $\beta = \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ for V, der kun indeholder egenvektorer. Den tilsvarende matrix ${}_\beta[L]_\beta$ er en diagonalmatrix med egenværdier tilhørende $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ i sin diagonal. □

Korollar 11.3.4

En matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ kan diagonaliseres, hvis og kun hvis det karakteristiske polynomium for $\mathbf{A}$ er på formen $p_\mathbf{A}(Z) = (-1)^n \cdot (Z - \lambda_1)^{m_1} \cdots (Z - \lambda_r)^{m_r}$ for nogle $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{F}$, og $\mathrm{am}(\lambda_i) = \mathrm{gm}(\lambda_i)$ for enhver egenværdi λ_i.

Bevis. Dette følger af Sætning 11.3.3 anvendt på den lineære afbildning $L_\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$. □

Korollar 11.3.5

Lad V være et endeligdimensionelt, komplekst vektorrum. En lineær afbildning $L : V \to V$ kan diagonaliseres, hvis og kun hvis $\mathrm{am}(\lambda_i) = \mathrm{gm}(\lambda_i)$ for enhver egenværdi λ_i for L. Ligeledes er en kompleks matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ similær med en diagonalmatrix, hvis og kun hvis $\mathrm{am}(\lambda_i) = \mathrm{gm}(\lambda_i)$ for enhver egenværdi λ_i for $\mathbf{A}$.

Bevis. Hvis legemet, vi arbejder over, er $\mathbb{C}$, følger det af Sætning 4.6.3, at det karakteristiske polynomium $p_L(Z)$ kan skrives som et produkt af dets ledende koefficient samt led på formen $Z - \lambda$. Derfor er denne betingelse i Sætning 11.3.3 altid opfyldt, hvis $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, og den kan derfor fjernes. Sætning 11.3.3 medfører derefter det, vi ønsker. Beviset for korollaret i tilfælde af en kompleks matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ udføres på tilsvarende vis. □

Eksempel 11.3.1

Betragt den lineære afbildning $\tilde{D} : V \to V$ introduceret i Eksempel 11.1.6. I det eksempel var V det komplekse vektorrum af polynomier af højst tredje grad, og $\tilde{D} : V \to V$ blev defineret ved $p(Z) \mapsto p(Z)'$.

Spørgsmål: Kan den lineære afbildning $\tilde{D}$ diagonaliseres?

Svar: Fra Eksempel 11.1.6 ved vi, at $p_{\tilde{D}}(Z) = Z^4$. Med notationen fra Sætning 11.3.3 har vi, at $r = 1$, og $\lambda_1 = 0$. Desuden er $\mathrm{am}(0) = 4$, da 0 er en rod med multiplicitet fire i $p_{\tilde{D}}(Z)$. I Eksempel 11.2.2 har vi set, at E_0 er et endimensionelt vektorrum med basis $\{1\}$. Derfor er $\mathrm{gm}(0) = \dim E_0 = 1$. Da $\mathrm{gm}(0) < \mathrm{am}(0)$, medfører Sætning 11.3.3, at den lineære afbildning $\tilde{D}$ ikke kan diagonaliseres.

Eksempel 11.3.2

Betragt matricen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

som vi arbejde med i Eksempel 11.2.1, og som også optrådte i Eksempel 11.1.5.

Spørgsmål 1: Kan matricen $\mathbf{A}$ diagonaliseres, når vi arbejder over de reelle tal $\mathbb{R}$? Hvis ja, bestem en matrix $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, således at $\mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}$ er en diagonalmatrix.

Spørgsmål 2: Kan matricen $\mathbf{A}$ diagonaliseres, når vi arbejder over de komplekse tal $\mathbb{C}$? Hvis ja, bestem en matrix $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, således at $\mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}$ er en diagonalmatrix.

Svar på Spørgsmål 1: Vi fandt i Eksempel 11.1.5 frem til, at $p_{\mathbf{A}}(Z) = Z^2 + 1$. Da $Z^2 + 1$ ikke har nogen reelle rødder, kan det ikke skrives på den form, der kræves i Korollar 11.3.4. Derfor er matricen $\mathbf{A}$ ikke diagonalisérbar over $\mathbb{R}$.

Svar på Spørgsmål 2: Det karakteristiske polynomium $p_{\mathbf{A}}(Z) = Z^2 + 1$ har to komplekse rødder, nemlig i og $-i$. Desuden har vi, at $Z^2 + 1 = (Z - i) \cdot (Z + i)$. Derfor er $\mathrm{am}(i) = 1$ og $\mathrm{am}(-i) = 1$. Da vi ved fra Sætning 11.2.4, at $1 \leq \mathrm{gm}(\lambda) \leq \mathrm{am}(\lambda)$ for enhver egenværdi λ, konkluderer vi, at $\mathrm{gm}(i) = \mathrm{am}(i) = 1$, og $\mathrm{gm}(-i) = \mathrm{am}(-i) = 1$. Dermed er alle betingelser i Korollar 11.3.4 opfyldt. Vi konkluderer, at den givne matrix $\mathbf{A}$ er diagonalisérbar over de komplekse tal.

Nu bestemmer vi eksplicit en invertibel matrix $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, således at $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$ er en diagonalmatrix. Lad os ved ϵ betegne standardbasen for $\mathbb{C}^2$. Da er ${}_\epsilon[L_{\mathbf{A}}]_\epsilon = \mathbf{A}$. For at diagonalisere $\mathbf{A}$, diagonaliserer vi simpelthen den tilsvarende lineære afbildning $L_{\mathbf{A}}$. For at gøre det, skal vi finde en ordnet basis for $\mathbb{C}^2$ bestående af egenvektorer. I Eksempel 11.2.1 så vi, at:

$$E_i \quad \text{har basis} \quad \left\{ \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \qquad \text{og} \qquad E_{-i} \quad \text{har basis} \quad \left\{ \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Derfor er $\beta = \left(\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ en ordnet basis for $\mathbb{C}^2$ bestående kun af egenvektorer. Ved anvendelse af denne ordnede basis har vi, at afbildningsmatricen ${}_\beta[L_{\mathbf{A}}]_\beta$ er en diagonalmatrix med egenværdierne tilhørende vektorerne i den ordnede basis β i sin diagonal. Derfor er

$${}_\beta[L_{\mathbf{A}}]_\beta = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

For at finde matricen $\mathbf{Q}$, således at $\mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}$ er en diagonalmatrix, ser vi nu, at

$${}_\beta[L_{\mathbf{A}}]_\beta = {}_\beta[\mathrm{id}_{\mathbb{C}^2}]_\epsilon \cdot {}_\epsilon[L_{\mathbf{A}}]_\epsilon \cdot {}_\epsilon[\mathrm{id}_{\mathbb{C}^2}]_\beta = {}_\epsilon[\mathrm{id}_{\mathbb{C}^2}]_\beta^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot {}_\epsilon[\mathrm{id}_{\mathbb{C}^2}]_\beta.$$

Derfor kan vi simpelthen vælge $\mathbf{Q} = {}_\epsilon[\mathrm{id}_{\mathbb{C}^2}]_\beta$, koordinatskiftematricen fra β-koordinater til ϵ-koordinater. Denne matrix indeholder egenværdierne i β som søjler. Derfor er

$$\mathbf{Q} = {}_\epsilon[\mathrm{id}_{\mathbb{C}^2}]_\beta = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

den matrix, vi leder efter. Ved en kontrol ser vi ganske rigtigt, at

$$\begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

11.4 Fibonacci-tal genbesøgt

I Eksempel 5.1.2, mere præcist i Ligning (5.3), gav vi et eksempel på en rekursivt defineret sekvens af tal $F_1, F_2, F_3, \ldots$ kaldet Fibonacci-tallene:

$$F_n = \begin{cases} 1 & \text{hvis } n = 1, \\ 1 & \text{hvis } n = 2, \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{hvis } n \geq 3. \end{cases} \tag{11.4}$$

Denne rekursion kan også udtrykkes ved hjælp af matricer. Faktisk ser man direkte fra Ligning (11.4), at

$$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{bmatrix} \quad \text{for alle } n \geq 3.$$

Denne matrixform gør det muligt at finde en lukket formel som beskrivelse af Fibonacci-tallene. Først og fremmest har vi følgende:

Lemma 11.4.1

For alle $n \geq 2$ gælder der, at:

$$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Bevis. Dette kan vises ved hjælp af induktion på n med basistrin $n = 2$. Detaljerne overlades til læseren. □

For at finde en lukket formel for F_n, er det nok at finde en lukket formel for potenser af matricen

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi vil diagonalisere $\mathbf{P}$ for at gøre dette. Det viser sig nemlig, at hvis en matrix kan diagonaliseres, er det muligt at finde et lukket formeludtryk for dens potenser:

Lemma 11.4.2

Lad $\mathbb{F}$ være et legeme og $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ en kvadratisk matrix. Lad $\mathbf{Q} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ være en invertibel matrix, således at $\mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}$ er en diagonalmatrix $\mathbf{D}$ med elementerne $d_1, \ldots, d_n$ i sin diagonal. Da er

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D}^n \cdot \mathbf{Q}^{-1}.$$

Desuden er $\mathbf{D}^n$ en diagonalmatrix med elementerne $d_1^n, \ldots, d_n^n$ i sin diagonal.

Bevis. Med induktion på n kan man vise, at $(\mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q})^n = \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{A}^n \cdot \mathbf{Q}$ for alle $n \geq 1$. Da $\mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{D}$, følger resultatet. At vise, at $\mathbf{D}^n$ er en diagonalmatrix med elementerne $d_1^n, \ldots, d_n^n$ i sin diagonal, er let ved induktion på n. □

Pointen med dette lemma er, at det gør beregningen af potenser af en matrix relativt let, hvis matricen er diagonalisérbar. Lad os nu vende tilbage til matricen $\mathbf{P}$. Det karakteristiske polynomium for $\mathbf{P}$ er

$$p_{\mathbf{P}}(Z) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-Z & 1 \\ 1 & -Z \end{bmatrix}\right) = Z^2 - Z - 1.$$

Derfor er egenværdierne for $\mathbf{P}$ $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ og $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Dette betyder allerede, at matricen $\mathbf{P}$ er diagonalisérbar. For at finde den ønskede koordinatskiftematrix, skal vi finde en basis for egenrummene. For at finde en basis for egenrummet E_{λ_1}, bemærker vi, at

$$\mathbf{P} - \lambda_1 \cdot \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \leftarrow R_2 - \lambda_2 \cdot R_1]{} \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dermed har vi, at en basis for E_{λ_1} er givet ved

$$\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}\right\}.$$

Ligeledes kan man vise, at en basis for E_{λ_2} er givet ved

$$\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}\right\}.$$

Derfor er

$$\begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix},$$

hvilket medfører, at

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}^{-1}.$$

Ved anvendelse af Lemma 11.4.2 til udregning af potenser af $\mathbf{P}$ samt Lemma 11.4.1 ser vi nu, at

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Efter at have beregnet alle matrixprodukterne på højre side, opnår man at

$$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \end{bmatrix},$$

hvilket forklarer, hvor Ligning (5.4) kom fra.

I dette afsnit fokuserede vi på Fibonacci-tallene, men meget lignende teknikker kan benyttes til at finde lukkede formeludtryk for andre rekursivt definerede sekvenser af tal. Vi vil ikke forfølge dette yderligere her.

11.5 Ekstra: Hvad hvis diagonalisering ikke er mulig?

Dette afsnit er ikke nødvendig læsning og kan springes over. Det er ment som ekstra materiale for en læser, der har tiden og motivationen til det.

Som vi har set i det foregående afsnit, er diagonalisering af en lineær afbildning $L : V \to V$ ikke altid mulig. I dette afsnit vil vi arbejde med den berømte *Jordans normalform*. Nøglen til diagonalisering var at undersøge egenrummet $E_\lambda = \ker(L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)$ for en given egenværdi λ. Vi definerede $\mathrm{gm}(\lambda) = \dim E_\lambda$ og har set, at diagonalisering af en matrix eller lineær afbildning kræver, at betingelsen $\mathrm{gm}(\lambda) = \mathrm{am}(\lambda)$ er opfyldt. Hvis $\mathrm{gm}(\lambda) < \mathrm{am}(\lambda)$, viser det sig, at man kan undersøge kernerne af potenser af den lineære afbildning $L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V$. Her skal den i'te potens f^i af en funktion $f : V \to V$ forstås som den i-foldige sammensætning af f med sig selv (altså $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$ og så videre).

Lemma 11.5.1

Lad $\mathbb{F}$ være et legeme, V et n-dimensionelt vektorrum over $\mathbb{F}$ og $L : V \to V$ en lineær afbildning. Antag yderligere, at $\lambda \in \mathbb{F}$ er en egenværdi for L. Da gælder der, at

$$\ker(L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) \subseteq \ker((L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^2) \subseteq \ker((L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^3) \subseteq \dots$$

Yderligere,

(i) hvis $\ker((L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^i) = \ker((L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^{i+1})$ for et positivt heltal i, så er $\ker((L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^i) = \ker((L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^m)$ for alle $m \geq i$, og

(ii) $\ker((L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^n) = \ker((L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^{n+1})$.

Bevis. Det er klart, at kernen af $(L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^{i+1}$ for alle i er et underrum i kernen af $(L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^i$. Hvis ligheden holder for nogle i, så opnår vi ved dimensionssætningen for lineære afbildninger, se Korollar 10.4.3, at også billederne af de lineære afbildninger

$(L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^{i+1}$ og $(L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^i$ er ens. Så har vi, at

$$\begin{aligned}
\mathrm{im}(L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^{i+2} &= (L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^{i+2}(V) \\
&= (L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)((L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^{i+1}(V)) \\
&= (L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)((L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^{i}(V)) \\
&= (L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^{i+1}(V) \\
&= \mathrm{im}(L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^{i+1} \\
&= \mathrm{im}(L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^{i}.
\end{aligned}$$

Men så ser vi, igen ved at bruge dimensionssætningen for lineære afbildninger, at kernen af $(L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^{i+2}$ er lig med kernen af $(L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^i$. Ved induktion på m kan man på samme måde vise, at kernen af $(L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^m$ for enhver $m \geq i$ er lig med kernen af $(L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^i$.

Betragt nu sekvensen af underrum:

$$\ker(L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) \subseteq \ker((L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^2) \subseteq \ker((L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^3) \subseteq \ldots$$

Fra det foregående ved vi, at hvis ligheden holder et eller andet sted i sekvensen, så vil lighederne holde fra da af. Derfor findes der et $e \geq 1$, således at

$$\ker(L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) \subsetneq \cdots \subsetneq \ker((L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^e) = \ker((L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^{e+1}) = \ldots$$

For hver skarp inklusion øges dimensionen af underrummet med mindst én. Da $\dim V = n$, og $\dim \ker(L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) = \dim E_\lambda \geq 1$, kan dette højst ske n gange. Derfor er $e \leq n$. Særligt er $\ker((L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^n) = \ker((L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^{n+1})$. □

Sætning 11.5.2

Lad $\mathbb{F}$ være et legeme, V et n-dimensionelt vektorrum over $\mathbb{F}$ og $L : V \to V$ en lineær afbildning. Antag yderligere, at $\lambda \in \mathbb{F}$ er en egenværdi for L, og skriv $U = \mathrm{im}(L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^n$ og $W = \ker(L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^n$. Da gælder der, at

(i) $L(U) \subseteq U$, og $L(W) \subseteq W$.

(ii) $\dim U + \dim W = \dim V$, og $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$.

(iii) Enhver vektor i V kan skrives som en sum af en vektor i U og en vektor i W.

Bevis. Vi har set i det tredje punkt i Lemma 11.5.1, at $W = \ker(L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^n = \ker(L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^{n+1}$. Vælg nu et $\mathbf{w} \in W$. Da er også $(L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)(\mathbf{w}) \in W$, da $(L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^n((L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)(\mathbf{w})) = (L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)((L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^n(\mathbf{w})) = (L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Derfor er $L(\mathbf{w}) - \lambda \cdot \mathbf{w} \in W$, hvilket medfører, at $L(\mathbf{w}) \in W$. Vi kan konkludere, at $L(W) \subseteq W$. Ligeledes, hvis $\mathbf{u} \in U$, så er $(L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)(\mathbf{u}) \in U$, fordi vi, hvis $\mathbf{u} = (L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^n(\mathbf{v})$ for nogle $\mathbf{v} \in V$, har, at $(L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)(\mathbf{u}) = (L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)((L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^n(\mathbf{v})) = (L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^n((L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)(\mathbf{v})) \in U$. Derfor er $L(\mathbf{u}) - \lambda \cdot \mathbf{u} \in U$, hvilket medfører, at $L(\mathbf{u}) \in U$. Vi kan konkludere, at $L(U) \subseteq U$.

Dimensionssætningen for lineære afbildninger anvendt på den lineære afbildning $(L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^n : V \to V$ medfører straks, at $\dim U + \dim W = \dim V$. Nu beviser vi, at $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$. Lad $\mathbf{u} \in U \cap W$. Vi ønsker at vise, at $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Først og fremmest, da $\mathbf{u} \in U$, findes der $\mathbf{v} \in V$, således at $\mathbf{u} = (L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^n(\mathbf{v})$. For det andet, da $\mathbf{u} \in W$, har vi $(L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^n(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$. Ved at kombinere disse to, ser vi, at

$$(L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^{2n}(\mathbf{v}) = (L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^n(\mathbf{u}) = \mathbf{0}.$$

Med andre ord, $\mathbf{v} \in \ker(L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^{2n}$. Men Lemma 11.5.1 medfører, at $\ker(L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^{2n} = \ker(L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^n$, og derfor $\mathbf{v} \in \ker(L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^n$. Men så er $\mathbf{u} = (L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^n(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, hvilket er, hvad vi ønskede at vise.

Givet en ordnet basis $\beta_U = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r)$ for U og en ordnet basis $\beta_W = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s)$ for W. Forenes de to, får vi en ordnet basis $\beta = (\beta_U, \beta_W)$ for V. Faktisk kan det faktum, at $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$ bruges til at vise, at vektorerne i β er lineært uafhængige, mens identiteten $\dim U + \dim W = \dim V$ medfører, at β indeholder præcis n vektorer. Givet en vilkårligt valgt $\mathbf{v} \in V$ kan vi nu skrive $\mathbf{v}$ på præcis én måde som en linearkombination af $\mathbf{u}_i$ og $\mathbf{w}_j$, nemlig $\mathbf{v} = \sum_i \alpha_i \cdot \mathbf{u}_i + \sum_j \beta_j \cdot \mathbf{w}_j$. Vi ser, at $\sum_i \alpha_i \cdot \mathbf{u}_i \in U$ og $\sum_j \beta_j \cdot \mathbf{w}_j \in W$, hvoraf det sidste punkt i sætningen følger. $\square$

Korollar 11.5.3

Skriv med samme notation som i Sætning 11.5.2 $p_L(Z) = (\lambda - Z)^{\mathrm{am}(\lambda)} \cdot q(Z)$ for en passende valgt $q(Z) \in \mathbb{F}[Z]$. Betegn ved $L|_W : W \to W$, henholdsvis $L|_U : U \to U$, lineære afbildninger opnået ved afgrænsning af definitionsmængden og dispositionsmængden for L til U, henholdsvis W. Da er $p_L(Z) = p_{L|_U}(Z) \cdot p_{L|_W}(Z)$, og λ er ikke en rod i $p_{L|_U}(Z)$.

Bevis. For en givet ordnet basis $\beta_U = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r)$ for U og en givet ordnet basis $\beta_W = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s)$ for W har vi allerede set i beviset for Sætning 11.5.2, at $\beta = (\beta_U, \beta_W)$ er en ordnet basis for V. Da vi ved, at $L(U) \subseteq U$, og $L(W) \subseteq W$, vil matricen ${}_\beta[L]_\beta \in \mathbb{F}^{n \times n}$ have formen

$$ {}_\beta[L]_\beta = \begin{bmatrix} {}_{\beta_U}[L]_{\beta_U} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}_{\beta_W}[L]_{\beta_W} \end{bmatrix}. \tag{11.5}$$

Dette medfører, at $p_L(Z) = p_{L|_U}(Z) \cdot p_{L|_W}(Z)$. Bemærk nu, at λ ikke kan være en rod i $p_{L|_U}(Z)$. Hvis dette var tilfældet, ville der eksistere en $\mathbf{u} \in U$ forskellig fra nul, således at $L|_U(\mathbf{u}) = \lambda \cdot \mathbf{u}$. Da vi per definitionen af den lineære afbildning $L|_U$ har $L|_U(\mathbf{u}) = L(\mathbf{u})$, ville dette medføre, at $(L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$. Men så ville vi have $\mathbf{u} \in \ker(L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)$, hvilket ville medføre, at $\mathbf{u} \in \ker(L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^n = W$. Da vi har set, at $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$, ville vi opnå, at $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, i modstrid med vores antagelse. $\square$

Lad os nu vende tilbage til det, vi prøver at opnå: at finde en matrix, der repræsenterer L, der er så simpel som mulig. Ligning (11.5) er et vigtigt skridt på vejen. Faktisk har vi reduceret problemstillingen til to enklere opgaver: at finde en simpel matrix, der repræsenterer $L|_U$, og en, der repræsenterer $L|_W$. Desuden er λ ikke en rod i det karakteristiske polynomium for $L|_U$, så for at håndtere egenværdien λ for L behøver vi kun at fortsætte undersøgelsen af den lineære afbildning $L|_W$. Lad os først få en intuitiv idé om, hvad der foregår. Hvis $\mathrm{am}(\lambda) = \mathrm{gm}(\lambda)$, kan vi finde en ordnet basis β_W for W, der består udelukkende af egenvektorer for L, alle med λ som egenværdi. Så er

$$_{\beta_W}[L]_{\beta_W} = [\lambda \cdot \mathbf{I}_s],$$

hvor $s = \dim W$. Hvad vi gjorde i forrige afsnit var essentielt set blot at gentage denne procedure for en anden egenværdi og opdele matricen, der repræsenterer $L|_U$, i mindre blokke. Så længe den algebraiske og geometriske multiplicitet af egenværdierne altid er den samme, vil vi ende med at have diagonaliseret hele matricen.

Men hvad sker der så, hvis $\mathrm{am}(\lambda) > \mathrm{gm}(\lambda)$? Vi kan stadig finde en ordnet basis β_W for W, der består af egenvektorer til egenværdien λ, men vi har også brug for nogle flere vektorer i β_W, der ikke er egenvektorer. Sagt på en anden måde: hvis $\mathrm{am}(\lambda) = \mathrm{gm}(\lambda)$, så er $W = E_\lambda$, således at $\ker(L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) = \ker((L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^n)$. Men hvis $\mathrm{am}(\lambda) > \mathrm{gm}(\lambda)$, så indeholder W E_λ, men er ikke lig med det. Så tilsyneladende er $\ker(L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) \subsetneq \ker((L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^n)$. Dette medfører specifikt, at $\ker(L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) \subsetneq \ker((L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^2)$ ved anvendelse af Lemma 11.5.1. Hvis vi vælger en vektor $\mathbf{w} \in \ker((L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^2) \setminus \ker(L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)$, har den den pæne egenskab, at $L(\mathbf{w}) - \lambda \cdot \mathbf{w} = (L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)(\mathbf{w}) \in \ker(L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) = E_\lambda$. Lad os definere $\mathbf{v} = L(\mathbf{w}) - \lambda \cdot \mathbf{w}$. Vi ser, at $L(\mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{v}$, da $\mathbf{v} \in E_\lambda$, og $L(\mathbf{w}) = \lambda \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v}$, ud fra den måde vi definerede $\mathbf{v}$ på. Så hvis vi kun ser på effekten af L på det todimensionelle underrum i V udspændt af $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$, som har den ordnede basis $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, kan vi repræsentere L ved matricen

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Dette giver en første idé om, hvad man kan forvente mere generelt om en matrix, der repræsenterer $L|_W$. Specifikt motiverer det til følgende:

Definition 11.5.1

Lad $\mathbb{F}$ være et legeme, og $\lambda \in \mathbb{F}$. En *Jordanblok* af størrelse e er en matrix $\mathbf{J}_e(\lambda) \in \mathbb{F}^{e \times e}$ på formen

$$\mathbf{J}_e(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \mathbf{0} & & & \lambda \end{bmatrix}.$$

Lemma 11.5.4

Lad $L : V \to V$ være en lineær afbildning, $\dim V = n$ og λ en egenværdi for L. Lad yderligere $W = \ker((L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^n)$. Da findes der en ordnet basis for W, således at $L|_W : W \to W$, restriktionen af L til W, har en afbildningsmatrix $\mathbf{D}(\lambda)$ på formen

$$\mathbf{D}(\lambda) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{e_1}(\lambda) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{J}_{e_s}(\lambda) \end{bmatrix}$$

for et positivt heltal s og positive heltal $e_1, \ldots, e_s$.

Bevis. Det vil være praktisk at skrive $W_i = \ker((L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^i)$ og $r_i = \dim W_i$. Bemærk, at $W_1 = E_\lambda$. Lad nu e være den største eksponent, således at $W_{e-1} \subsetneq W_e$. Så er $W_e = W$ og $r_1 < r_2 < \cdots < r_e = \dim W$. Lad $\beta = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{r_e})$ være en ordnet basis for W med den yderligere egenskab, at $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{r_i})$ er en ordnet basis for W_i for alle i.

Vi konstruerer nu gradvist en anden ordnet basis for W, som vi kan kalde γ. Først og fremmest tilføjer vi til γ vektorerne $\mathbf{w}_i$ for ethvert i mellem $r_{e-1} + 1$ og r_e. Grundet denne konstruktion vil vektoren $\mathbf{w}_i$ for ethvert i mellem $r_{e-1} + 1$ og r_e ligge i W_e men ikke i W_{e-1}. Betragt nu vektorerne $\mathbf{w}_{i,j} = (L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^j(\mathbf{w}_i)$ for $j = 0, \ldots, e-1$. Bemærk, at vektoren $\mathbf{w}_{i,j}$ ligger i W_{e-j} men ikke i W_{e-j-1}. Bemærk også, at $\mathbf{w}_i = \mathbf{w}_{i,0}$ for ethvert i mellem $r_{e-1} + 1$ og r_e.

Først hævder vi, at vektorerne $\mathbf{w}_{i,e-1}$ er lineært uafhængige. Hvis $\sum_{i=r_{e-1}+1}^{r_e} \alpha_i \cdot \mathbf{w}_{i,e-1} = 0$, så er $\sum_{i=r_{e-1}+1}^{r_e} \alpha_i \cdot \mathbf{w}_i \in W_{e-1}$ og derfor i udspændingen af vektorerne $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{r_{e-1}}$. Men da vektorerne $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{r_e}$ er lineært uafhængige, medfører dette, at $\alpha_i = 0$ for alle $i = r_{e-1} + 1, \ldots, r_e$. Dernæst hævder vi, at vektorerne $\mathbf{w}_{i,j}$ med $i = r_{e-1} + 1, \ldots, r_e$ og $j = 0, \ldots, e-1$ er lineært uafhængige. Hvis $\sum_i \sum_{j=0}^{e-1} \alpha_{i,j} \cdot \mathbf{w}_{i,j} = 0$, så anvender vi $(L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^{e-1}$ og får ligningen $\sum_i \alpha_{i,0} \cdot \mathbf{w}_{i,e-1} = 0$. Derfor er $\alpha_{i,0} = 0$ for alle i. Ved at anvende lavere og lavere potenser af $(L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)$ til ligningen $\sum_i \sum_{j=0}^{e-1} \alpha_{i,j} \cdot \mathbf{w}_{i,j} = 0$ opnår man induktivt, at $\alpha_{i,j} = 0$ for alle i og j.

Derfor giver det mening at inkludere alle vektorerne $\mathbf{w}_{i,j}$ i γ. Mere præcist definerer vi nu $\gamma = (\mathbf{w}_{r_{e-1}+1,e-1}, \ldots, \mathbf{w}_{r_{e-1}+1,0}, \ldots, \mathbf{w}_{r_e,e-1}, \ldots, \mathbf{w}_{r_e,0})$. Vi har $(L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)(\mathbf{w}_{i,j}) = \mathbf{w}_{i,j+1}$ for $j = 0, \ldots, e-2$, og $(L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)(\mathbf{w}_{i,e-1}) = \mathbf{0}$. Dette medfører, at

$$L(\mathbf{w}_{i,j}) = \lambda \cdot \mathbf{w}_{i,j} + \mathbf{w}_{i,j+1} \quad \text{for } j = 0, \ldots, e-2 \text{ og} \quad L(\mathbf{w}_{i,e-1}) = \lambda \cdot \mathbf{w}_{i,e-1}.$$

Vi har nu rent faktisk vist, at restriktionen af L til underrummet udspændt af $\mathbf{w}_{i,j}$ kan repræsenteres ved en blokdiagonalmatrix med $r_e - r_{e-1}$ mange matricer $\mathbf{J}_e(\lambda)$ i sin diagonal.

For ethvert j mellem 0 og $e - 1$ udspænder vektorerne $\mathbf{w}_{i,j}$ med i varierende fra $r_{e-1} + 1$ til r_e et underrum i W_{e-j}. Hvis dette underrum er lig med W_{e-j} for alle j, så er γ en ordnet basis for W, der giver anledning til en matrix, der repræsenterer W på Jordans normalform, som vi har set. Hvis ikke, så lad $\tilde{j}$ være den mindste værdi af j, således at dette underrum ikke er hele W_{e-j}, og definér $\tilde{e} = e - \tilde{j}$. Lad så $\tilde{\mathbf{w}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{w}}_d \in W_{\tilde{e}}$ være vektorer, således at

$$(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{r_{\tilde{e}-1}}, \tilde{\mathbf{w}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{w}}_d, \mathbf{w}_{r_{e-1}+1,\tilde{j}}, \ldots, \mathbf{w}_{r_e,\tilde{j}})$$

er en ordnet basis for $W_{\tilde{e}}$. Vi fortsætter på samme måde som før og definerer vektorer $\tilde{\mathbf{w}}_{i,j} = (L - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^j(\tilde{\mathbf{w}}_i)$, som vi tilføjer til γ, og som vil give anledning til Jordanblokke af størrelse $\tilde{e}$ i matricen, der repræsenterer L.

Fortsætter vi på denne måde, vil vi ende med en ordnet basis γ, der giver anledning til en matrix på Jordans normalform, som repræsenterer restriktionen af L til W. □

Sætning 11.5.5

Lad $\mathbb{F}$ være et legeme, V et endeligdimensionelt vektorrum og $L : V \to V$. Antag, at der eksisterer forskellige $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{F}$ samt positive heltal $m_1, \ldots, m_r$, således at $p_L(Z) = (-1)^n \cdot (Z - \lambda_1)^{m_1} \cdots (Z - \lambda_r)^{m_r}$. Da kan den lineære afbildning repræsenteres ved en matrix på formen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}(\lambda_1) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{D}(\lambda_r) \end{bmatrix},$$

hvor hver matrix $\mathbf{D}(\lambda_i) \in \mathbb{F}^{m_i \times m_i}$ er på formen som i Lemma 11.5.4.

Bevis. Vi beviser sætningen med induktion på antallet af egenværdier. Vi bruger den samme notation for U og W som i Sætning 11.5.2. Hvis $r = 1$, er $W = V$ og derfor $L|_W = L$. Derfor følger resultatet fra Lemma 11.5.4. Lad nu $r > 1$. Lad $\lambda = \lambda_r \in \mathbb{F}$ være en egenværdi for L. Fra Lemma 11.5.4 konkluderer vi, at vi kan vælge en ordnet basis for W, således at $L|_W$ er repræsenteret ved en blokdiagonalmatrix med Jordanblokke $\mathbf{J}_{e_i}(\lambda_r)$ i sin diagonal. Yderligere har vi fra Korollar 11.5.3, at λ_r ikke er en egenværdi for $L|_U$, mens det karakteristiske polynomium for $L|_U$ er en divisor af $P_L(Z)$. Derfor er induktionshypotesen gyldig. □

Matricen givet i Sætning 11.5.5 siges at være *Jordans normalform* af matricen $\mathbf{A}$.

Korollar 11.5.6

Lad $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ være en kompleks matrix. Da er $\mathbf{A}$ similær med en matrix på Jordans normalform.

Bevis. Hvis vi arbejder over de komplekse tal, følger det fra Sætning 4.6.3, at $p_{\mathbf{A}}(Z)$ kan skrives som et produkt af dets ledende koefficient, som er $(-1)^n$, og led af formen $Z - \lambda$. Derfor gælder Sætning 11.5.5. □