

## ||| Kapitel 10

# Lineære afbildninger mellem vektorrum

Lad to vektorrum  $V_1$  og  $V_2$  være givet, begge over det samme legeme  $\mathbb{F}$ . En lineær afbildning er da en funktion fra  $V_1$  til  $V_2$ , der er kompatibel med skalarmultiplikation og vektoraddition. Mere præcist har vi følgende:

### Definition 10.0.1

Lad  $V_1$  og  $V_2$  være vektorrum over et legeme  $\mathbb{F}$ . Da er en *lineær afbildning* fra  $V_1$  til  $V_2$  en funktion  $L : V_1 \rightarrow V_2$ , således at:

- (i)  $L(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v})$  for alle  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_1$ ,
- (ii)  $L(c \cdot \mathbf{u}) = c \cdot L(\mathbf{u})$  for alle  $c \in \mathbb{F}$  og  $\mathbf{u} \in V_1$ .

En lineær afbildning kaldes også en *lineær transformation*. Bemærk, at begrebet afbildning på engelsk kaldes *map*. Bemærk desuden i formlen  $L(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v})$ , at symbolet  $+$  i  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  betegner vektoraddition i  $V_1$ , mens  $+$  i  $L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v})$  betegner vektoraddition i  $V_2$ . Tilsvarende betegner  $\cdot$  i  $c \cdot \mathbf{u}$  skalarmultiplikation i  $V_1$ , mens det  $\cdot$  i  $c \cdot L(\mathbf{u})$  betegner skalarmultiplikation i  $V_2$ .

Hvor vi i det forrige kapitel studerede ét vektorrum ad gangen, kan lineære afbildninger forbinde forskellige vektorrum med hinanden. Lineære afbildninger respekterer vektorrumstrukturen: vælges en skalar  $c$  lig med 0, og benyttes Ligning (9.1), fås for eksempel

$$L(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \tag{10.1}$$

hvor  $\mathbf{0}$  på venstre side af ligningen betegner nulvektoren i  $V_1$ , og den på højre side betegner nulvektoren i  $V_2$ . Tilsvarende, ved at vælge  $c = -1$  og benytte Ligning (9.2), får man

$$L(-\mathbf{u}) = -L(\mathbf{u}). \tag{10.2}$$

Der findes selvfølgelig rigtig mange mulige afbildninger mellem to vektorrum, og generelt vil ikke mange være lineære. Lad os se på nogle eksempler.

### Eksempel 10.0.1

Betragt følgende funktioner fra  $\mathbb{R}$  til  $\mathbb{R}$ . Hvilke af dem er lineære afbildninger?

- (a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  defineret ved  $x \mapsto x^2$ ,
- (b)  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  defineret ved  $x \mapsto 2x + 1$ ,
- (c)  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  defineret ved  $x \mapsto 2x$ .

**Svar:**

- (a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  defineret ved  $x \mapsto x^2$  er ikke en lineær afbildning. For eksempel har vi  $f(1 + 1) = f(2) = 4$ , hvor vi, hvis  $f$  havde været en lineær afbildning, burde have haft  $f(1 + 1) = f(1) + f(1) = 1 + 1 = 2$ .
- (b)  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  defineret ved  $x \mapsto 2x + 1$  er heller ikke en lineær afbildning, selvom grafen for denne funktion er en linje. Vi har  $g(0) = 1$ , men hvis  $g$  havde været en lineær afbildning, burde vi have haft  $g(0) = 0$  jævnfør Ligning (10.1).
- (c)  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  defineret ved  $x \mapsto 2x$  er en lineær afbildning. For alle  $x, y \in \mathbb{R}$  har vi  $h(x + y) = 2(x + y) = 2x + 2y = h(x) + h(y)$ , og for alle  $c \in \mathbb{R}$  og  $x \in \mathbb{R}$  har vi  $c \cdot h(x) = c2x = 2cx = h(c \cdot x)$ .

Mere generelt er lineære afbildninger fra  $\mathbb{R}$  til  $\mathbb{R}$  netop de funktioner, hvis graf er en ret linje, der går gennem origo. Dette vil altså være funktioner  $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , der opfylder, at  $x \mapsto a \cdot x$  for en konstant  $a \in \mathbb{R}$ . Årsagen er, at hvis  $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  er en lineær afbildning, så har vi for alle  $x \in \mathbb{R}$ , at  $L(x) = L(x \cdot 1) = x \cdot L(1)$ . I den sidste lighed gjorde vi brug af egenskab to fra Definition 10.0.1. Ved at sætte  $a = L(1)$  får vi således  $L(x) = a \cdot x$  for alle  $x \in \mathbb{R}$ .

Vi vil komme til at se, at der er en stærk forbindelse mellem lineære afbildninger og matricer. Af denne grund lægger vi ud med at studere lineære afbildninger, der kommer af matricer, for derefter at vende tilbage til studiet af lineære afbildninger i en mere generel ramme.

## 10.1 Lineære afbildninger ved anvendelse af matricer

Lad os starte med at definere en stor klasse af lineære afbildninger.

### Definition 10.1.1

Lad  $\mathbb{F}$  være et legeme og  $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$  en matrix. Da defineres funktionen  $L_{\mathbf{A}} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$  ved  $L_{\mathbf{A}}(\mathbf{v}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$  for alle  $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$ .

Det viser sig, at alle funktioner  $L_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$  som defineret ovenfor er lineære.

### Lemma 10.1.1

Funktionen  $L_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$  i Definition 10.1.1 er en lineær afbildning.

*Bevis.* Vi skal kontrollere de to betingelser fra Definition 10.0.1. Først og fremmest har vi

$$\begin{aligned} L_A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \mathbf{A} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \\ &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \\ &= L_A(\mathbf{u}) + L_A(\mathbf{v}) \text{ for alle } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{F}^n. \end{aligned}$$

Dernæst har vi

$$L_A(c \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{A} \cdot (c \cdot \mathbf{u}) = c \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}) = c \cdot L_A(\mathbf{u}) \text{ for alle } c \in \mathbb{F} \text{ og } \mathbf{u} \in \mathbb{F}^n.$$

□

I Eksempel 10.0.1 så vi, at funktionen  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x$  var en lineær afbildning. Det er faktisk et interessant særtilfælde af Definition 10.1.1: hvis vi vælger  $n = m = 1$ ,  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  og  $\mathbf{A} = [2]$  i Definition 10.1.1, får vi funktionen  $h$ . I stedet for  $\mathbf{A} = [2]$  kunne vi også blot have skrevet  $\mathbf{A} = 2$ . Når man angiver en  $1 \times 1$ -matrix, er det almindeligt at udelade parenteserne [ ].

### Eksempel 10.1.1

Lad  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ , og vælg

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Yderligere defineres

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

**Spørgsmål:** Bestem  $L_A(\mathbf{u})$ ,  $L_A(\mathbf{v})$  og  $L_A((1/2)\mathbf{u} + \mathbf{v})$  med  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$  givet som ovenfor.

**Svar:** Vi har

$$L_A(\mathbf{u}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 + (1/2) \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

og tilsvarende

$$L_A(\mathbf{v}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 + (1/2) \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3/2 \end{bmatrix}.$$

Egentlig kan vi udregne  $L_A((1/2)\mathbf{u} + \mathbf{v})$  på forskellige måder. Den mest direkte metode er først at beregne vektoren  $(1/2)\mathbf{u} + \mathbf{v}$  og derefter beregne  $\mathbf{A} \cdot ((1/2)\mathbf{u} + \mathbf{v})$ . Gøres dette, får vi

$$(1/2)\mathbf{u} + \mathbf{v} = (1/2) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7/2 \end{bmatrix}$$

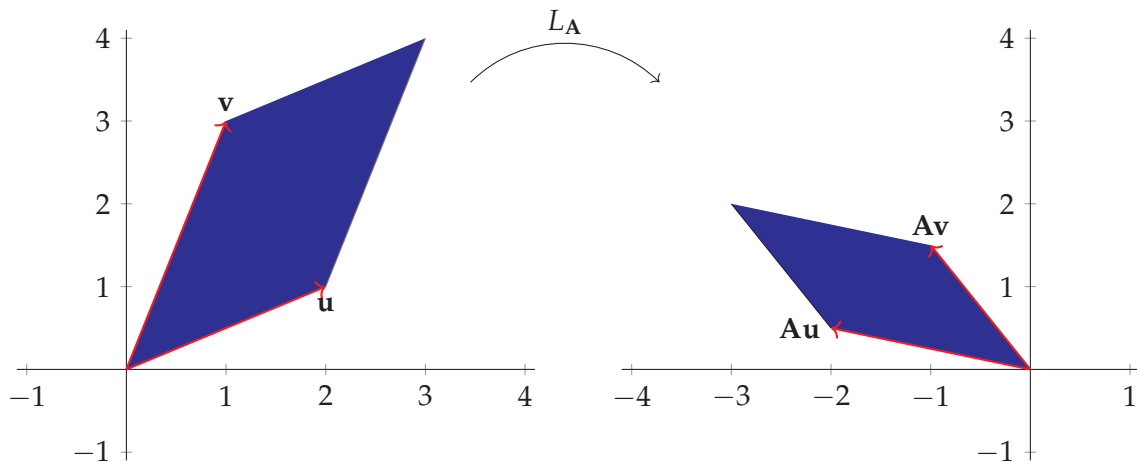
og derfor

$$L_A((1/2)\mathbf{u} + \mathbf{v}) = L_A \left( \begin{bmatrix} 2 \\ 7/2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 7/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 7/4 \end{bmatrix}.$$

En anden metode til beregning af  $L_A((1/2)\mathbf{u} + \mathbf{v})$  er at udnytte, at  $L_A$  er en lineær afbildning, og at vi allerede har udregnet  $L_A(\mathbf{u})$  og  $L_A(\mathbf{v})$ :

$$\begin{aligned} L_A((1/2)\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= L_A((1/2)\mathbf{u}) + L_A(\mathbf{v}) = (1/2)L_A(\mathbf{u}) + L_A(\mathbf{v}) \\ &= (1/2) \begin{bmatrix} -2 \\ 1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 7/4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Se Figur 10.1 for en illustration af billederne af vektorerne  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$  samt billedet af vektorer, der ligger i et parallelogram, hvor to af siderne er de givne vektorer  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$ .



Figur 10.1: Eksempel på en lineær afbildning givet ved en  $2 \times 2$ -matrix.

### Eksempel 10.1.2

Som i forrige eksempel lader vi  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  og definerer

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Denne gang vælger vi matricen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

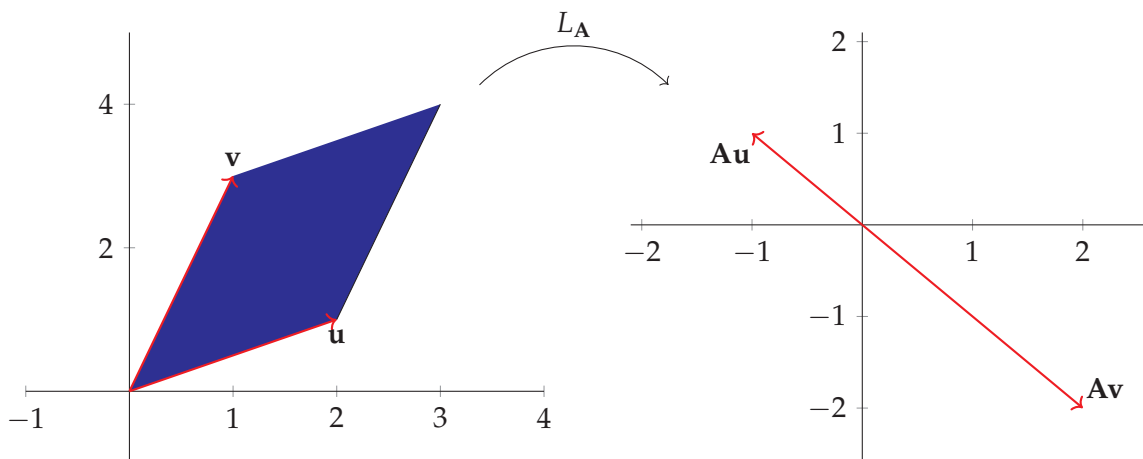
I dette tilfælde har vi

$$L_{\mathbf{A}}(\mathbf{u}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

og

$$L_{\mathbf{A}}(\mathbf{u}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

En illustration er givet i Figur 10.2. Denne gang er billedet af det blå område (parallelogrammet) blot linjen, der forbinder  $(-1, 1)$  og  $(2, -2)$ . Det er derfor ikke synligt på figuren, da det er skjult bag tegningen af vektorerne  $\mathbf{A}\mathbf{u}$  og  $\mathbf{A}\mathbf{v}$ .



Figur 10.2: Endnu et eksempel på en lineær afbildning givet ved en  $2 \times 2$ -matrix.

### Eksempel 10.1.3

Lad  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ , og vælg

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}.$$

Den tilsvarende lineære afbildning  $L_{\mathbf{A}} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  fungerer som følger:

$$L_{\mathbf{A}} \left( \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \\ v_1 + 2v_2 + 3v_3 + 4v_4 \end{bmatrix}.$$

Så har vi for eksempel

$$L_{\mathbf{A}} \left( \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad L_{\mathbf{A}} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad L_{\mathbf{A}} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Som Eksempel 10.1.3 viser, kan det godt ske, at en lineær afbildning  $L_{\mathbf{A}}$  afbilder en vektor til nulvektoren. Mængden af sådanne vektorer har et særligt navn:

### Definition 10.1.2

Lad  $\mathbb{F}$  være et legeme og  $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$  en matrix. Da er *kernen* af matricen  $\mathbf{A}$ , betegnet ved  $\ker \mathbf{A}$ , følgende mængde af vektorer:

$$\ker \mathbf{A} = \{ \mathbf{v} \in \mathbb{F}^n \mid \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \}.$$

Bemærk, at man på en ækvivalent måde kan definere kernen af en matrix  $\mathbf{A}$  som alle vektorer fra  $\mathbb{F}^n$ , der afbildes til nulvektoren af den lineære afbildning  $L_{\mathbf{A}}$ . Vi kan også tænke på vektorerne i kernen som netop de vektorer, der er løsninger til det homogene system af lineære ligninger med koefficientmatrix  $\mathbf{A}$ .

### Bemærkning 10.1.1

En bemærkning om terminologien er på sin plads her: nogle forfattere foretrækker at bruge ordet *nulrum* for det, vi kalder kernen af en matrix. På engelsk er den tilsvarende betegnelse *null space*, mens andre mulige engelske betegnelser er *right kernel* eller *right null space*. Årsagen til ordet "right", altså "højre", er, at matricen er ganget med en søjlevektor fra højre. Man kunne også have taget udgangspunkt i mængden af rækkevektorer  $\mathbf{u} \in \mathbb{F}^{1 \times m}$ , således at  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$ . Denne mængde kan på engelsk kaldes *left kernel* eller *left null space*.

En af grundene til, at vi her har introduceret begrebet kerne af en matrix, er, at det faktisk er et underrum. Lad os vise dette i følgende lemma.

### Lemma 10.1.2

Lad  $\mathbb{F}$  være et legeme og  $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$  en matrix. Da er kernen af  $\mathbf{A}$  et underrum i  $\mathbb{F}^n$ .

*Bevis.* Bemærk først og fremmest, at  $\mathbf{0} \in \ker \mathbf{A}$ , hvilket viser, at kernen af  $\mathbf{A}$  ikke er den tomme mængde. Dette betyder, at hvis vi sætter  $W = \ker \mathbf{A}$ , så er kravet om, at  $W$  ikke er tomt i Lemma 9.3.2, opfyldt.

Lad  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \ker \mathbf{A}$  og  $c \in \mathbb{F}$ . Da har vi

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{u} + c \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{A} \cdot (c \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} + c \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{0} + c \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}. \quad (10.3)$$

Her har vi benyttet, at  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$ , og  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , da  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \ker \mathbf{A}$ . Ligning (10.3) viser, at  $\mathbf{u} + c \cdot \mathbf{v} \in \ker \mathbf{A}$ . Dermed medfører Lemma 9.3.2, at  $\ker \mathbf{A}$  er et underrum i  $\mathbb{F}^n$ .  $\square$

Dimensionen af  $\ker \mathbf{A}$  betegnes  $\text{null}\mathbf{A}$  grundet den engelske betegnelse *nullity* for dimensionen af kernen.

### Eksempel 10.1.4

Lad  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ , og betragt matricen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Bestem en basis for  $\ker \mathbf{A}$ , og beregn dimensionen af kernen af  $\mathbf{A}$ .

**Svar:** Kernen af  $\mathbf{A}$  består af alle vektorer  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^4$ , der opfylder  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ . Vi har for eksempel set i Eksempel 10.1.3, at vektoren  $(1, -1, -1, 1)$  afbildes i  $(0, 0)$  af den lineære afbildning  $L_{\mathbf{A}}$ . Derfor er  $(1, -1, -1, 1) \in \ker \mathbf{A}$ .

Vi kan tænke på vektorerne i kernen som netop de vektorer, der er løsninger til det homogene system af to lineære ligninger med koefficientmatrix  $\mathbf{A}$ . For at beskrive alle disse løsninger, følger vi den samme procedure som forklaret i Eksempel 6.4.3 og Sætning 6.4.4. Derfor starter vi med at bringe matrix  $\mathbf{A}$  på reduceret trappeform:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Nu kan vi se, at  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \ker \mathbf{A}$ , hvis og kun hvis  $v_1 - v_3 - 2v_4 = 0$ , og  $v_2 + 2v_3 + 3v_4 = 0$ . Ligesom i Eksempel 6.4.3 (eller direkte ved hjælp af Sætning 6.4.4) ser vi, at

$$\ker \mathbf{A} = \left\{ t_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Vektorerne

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

udspænder dermed  $\ker \mathbf{A}$ . Faktisk fortæller Korollar 9.3.4, at disse to vektorer danner en basis for  $\ker \mathbf{A}$ . Derfor er en basis for  $\ker \mathbf{A}$  givet ved

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Da denne basis består af to vektorer, konkluderer vi, at dimensionen af kernen af  $\mathbf{A}$  er to. Med andre ord:  $\text{null}\mathbf{A} = 2$ .

Vi har allerede set, at vi kan betragte vektorerne i kernen som netop de vektorer, der er løsninger til det homogene system af lineære ligninger med koefficientmatrix  $\mathbf{A}$ . Ved anvendelse af Korollar 9.3.4 opnår vi følgende resultat, som ofte kaldes *dimensionssætningen for matricer*.

### Sætning 10.1.3

Lad  $\mathbb{F}$  være et legeme og  $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$  en matrix. Da gælder der, at

$$\rho(\mathbf{A}) + \text{null}(\mathbf{A}) = n,$$

hvor  $\rho(\mathbf{A})$  betegner rangen af matricen  $\mathbf{A}$ , og  $\text{null}(\mathbf{A})$  betegner dimensionen af kernen af matricen  $\mathbf{A}$ .

*Bevis.* Ved at anvende Korollar 9.3.4 ser vi, at kernens basis indeholder præcis  $n - \rho(\mathbf{A})$  vektorer. Derfor er  $\text{null}(\mathbf{A}) = \dim \ker(\mathbf{A}) = n - \rho(\mathbf{A})$ . Dette medfører, at  $\rho(\mathbf{A}) + \text{null}(\mathbf{A}) = n$ .  $\square$

Bemærk, at dimensionssætningen for matricer på engelsk kaldes *the rank-nullity theorem for matrices*, hvilket afslører sætningens indhold. Vi har set i Lemma 10.1.2, at kernen af en matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$  er et underrum i  $\mathbb{F}^n$ . Med andre ord:  $\ker \mathbf{A}$  er et underrum i definitionsmængden for den lineære afbildning  $L_{\mathbf{A}} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ . Til en matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$  kan man også knytte et underrum i  $\mathbb{F}^m$ , dispositionsmængden for den lineære afbildning  $L_{\mathbf{A}} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ . Dette gøres i følgende definition.

### Definition 10.1.3

Lad  $\mathbb{F}$  være et legeme og  $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$  en matrix. Da er *søjlerummet* af matricen  $\mathbf{A}$ , betegnet ved  $\text{colsp} \mathbf{A}$ , det underrum i  $\mathbb{F}^m$ , der er udspændt af søjlerne i  $\mathbf{A}$ . Dimensionen af søjlerummet af en matrix  $\mathbf{A}$  kaldes *søjlerangen* af  $\mathbf{A}$ .

Bemærk, at begreberne søjlerum og søjlerang på engelsk kaldes *column space*, henholdsvis *column rank*.

### Lemma 10.1.4

Lad  $\mathbb{F}$  være et legeme og  $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$  en matrix. Da er  $\text{colsp} \mathbf{A}$ , søjlerummet af matricen  $\mathbf{A}$ , netop billedet af den lineære afbildning  $L_{\mathbf{A}} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ .

*Bevis.* Et element fra søjlerummet af en matrix  $\mathbf{A}$  er per definition en linearkombination af søjlerne i  $\mathbf{A}$ . På den anden side er et element af billedet af den lineære afbildning  $L_{\mathbf{A}} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$  på formen  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$  for en vektor  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{F}^n$ . Ved at anvende



Definition 7.2.1 kan vi omskrive dette som en linearkombination af søjlerne i  $\mathbf{A}$  som følger:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = v_1 \cdot \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \cdots + v_n \cdot \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Derfor består billedet af den lineære afbildning  $L_{\mathbf{A}}$  netop af alle linearkombinationer af søjlerne i  $\mathbf{A}$ . Og dette er netop søjlerummet af matricen  $\mathbf{A}$ .  $\square$

### Bemærkning 10.1.2

På grund af Lemma 10.1.4 kaldes søjlerummet af en matrix  $\mathbf{A}$  også ofte for *billedet* eller *billedrummet* af  $\mathbf{A}$ .

Vi har tidligere introduceret rangen af en matrix i Definition 6.3.2. Rangen  $\rho(\mathbf{A})$  af en matrix  $\mathbf{A}$ , som defineret i Definition 6.3.2, kaldes nogle gange mere korrekt *rækkerangen* af matricen  $\mathbf{A}$ , da man kan vise, at dimensionen af vektorrummet udspændt af rækkerne i  $\mathbf{A}$  er lig med  $\rho(\mathbf{A})$ . Det viser sig dog, at for enhver matrix er dens rækkerang og søjlerang ens. Derfor vil vi blot kalde søjlerangen af en matrix  $\mathbf{A}$  for rangen af matricen og på simpel vis betegne den ved  $\rho(\mathbf{A})$  med samme notation som i Definition 6.3.2.

Det er ikke indlysende fra Definitionerne 6.3.2 og 10.1.3, at rækkerang og søjlerang af en matrix altid er de samme. En læser, der er villig til at acceptere, at dette er tilfældet, kan springe resten af dette afsnit over, men for den interesserede læser giver vi herunder et kort bevis af, hvorfor rækkerang og søjlerang altid er lig med hinanden.

### Sætning 10.1.5

Lad  $\mathbb{F}$  være et legeme og  $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$  en matrix. Da er rækkerangen og søjlerangen af matricen  $\mathbf{A}$  ens.

*Bevis.* Rækkerangen  $\rho(\mathbf{A})$  af en matrix  $\mathbf{A}$  er per definition lig med antallet af pivoter i  $\mathbf{A}$ 's reducerede trappeform. Sætning 9.3.3 medfører dog, at antallet af vektorer i en basis for søjlerummet af  $\mathbf{A}$  også er lig med dette antal pivoter. Derfor er dimensionen af søjlerummet af  $\mathbf{A}$  også lig med  $\rho(\mathbf{A})$ .  $\square$

### Eksempel 10.1.5

I dette eksempel ønsker vi at beregne rangen af matricen  $\mathbf{A}$  fra Eksempel 10.1.1 samt dimensionen af dens kerne. Vi har altså at gøre med

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

For at bestemme kernen af  $\mathbf{A}$  kan man i princippet følge samme procedure som i Eksempel 10.1.4, men da vi her har at gøre med en kvadratisk matrix, vælger vi en lidt anderledes

tilgang og anvender determinanter.

Først og fremmest er  $\det \mathbf{A} = (-1) \cdot 1/2 = -1/2$ . Specifikt er  $\det \mathbf{A} \neq 0$ . Derfor medfører Korollar 8.3.6, at kernen af matricen  $\mathbf{A}$  kun indeholder nulvektoren, det vil sige  $\ker \mathbf{A} = \{\mathbf{0}\}$ . Derfor er  $\text{null}(\mathbf{A}) = \dim\{\mathbf{0}\} = 0$  i dette eksempel.

Dimensionssætningen (Sætning 10.1.3) medfører så, at matricen  $\mathbf{A}$  har rang  $\rho(\mathbf{A}) = 2 - 0 = 2$ . Vi kunne også have beregnet rangen ved hjælp af Korollar 8.3.5: da  $\det \mathbf{A} \neq 0$ , medfører denne korollar, at de to søjler i  $\mathbf{A}$  er lineært uafhængige (man kunne også verificere dette direkte). Derfor har  $\mathbf{A}$  søjlerang to, og så medfører Sætning 10.1.5, at  $\rho(\mathbf{A}) = 2$ .

### Eksempel 10.1.6

I dette eksempel ønsker vi at beregne rangen af matricen  $\mathbf{A}$  fra Eksempel 10.1.2 samt dimensionen af dens kerne, så vi har at gøre med

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Bemærk, at  $\det \mathbf{A} = 0$  denne gang. Derfor er søjlerne i  $\mathbf{A}$  ikke lineært uafhængige ifølge Korollar 8.3.5. Faktisk er summen af søjlerne i  $\mathbf{A}$  lig nulvektoren, hvilket bekræfter, at de er lineært afhængige. Vi konkluderer, at

$$\text{colsp} \mathbf{A} = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Da vektoren  $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$  ikke er nulvektoren, konkluderer vi, at dimensionen af  $\text{colsp} \mathbf{A}$  er én. Specifikt har vi  $\rho(\mathbf{A}) = 1$  (som i det forrige eksempel benyttede vi Sætning 10.1.5). Dimensionssætningen medfører, at  $\text{null}(\mathbf{A}) = 2 - 1 = 1$ .

Bemærk, at Figur 10.2 intuitivt antyder, at billedet af den lineære afbildning  $L_{\mathbf{A}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  er endimensionelt. Ifølge Lemma 10.1.4 er billedet af  $L_{\mathbf{A}}$  det samme som søjlerummet af  $\mathbf{A}$ , så intuitionen stemmer.

## 10.2 Lineære afbildninger mellem generelle vektorrum

Forrige afsnit fokuserede på lineære afbildninger, der baseres på matricer, men Definition 10.0.1 tillader langt mere generelle lineære afbildninger. Det viser sig, at begreberne kerne og billede også giver mening i den generelle ramme. Lad os først gennemgå nogle flere eksempler.

### Eksempel 10.2.1

Lad  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ , og betragt det komplekse vektorrum  $\mathbb{C}[Z]$  (se Eksempel 9.1.5). Husk på, at  $\mathbb{C}[Z]$  betegner mængden af alle polynomier med koefficienter i  $\mathbb{C}$ . Betragt nu afbildningen

$D : \mathbb{C}[Z] \rightarrow \mathbb{C}[Z]$  defineret ved  $D(a_0 + a_1Z + a_2Z^2 + \dots + a_nZ^n) = a_1 + 2a_2Z + \dots + na_nZ^{n-1}$ . Med andre ord sender afbildningen  $D$  et polynomium  $p(Z)$  til dets afledte  $p'(Z)$ . Man kan vise, at  $D$  er en lineær afbildning.

### Eksempel 10.2.2

Lad  $V_1 = \mathbb{F}^{n \times n}$  og  $V_2 = \mathbb{F}$ , og lad en kvadratisk matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$  være givet. Da er *sporet*, betegnet ved  $\text{Tr}(\mathbf{A})$ , defineret som summen af diagonalelementerne. Med andre ord:

$$\text{Tr} \left( \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \right) = a_{11} + \dots + a_{nn}.$$

Betegnelsen  $\text{Tr}$  er en forkortelse for det engelske begreb for sporet af en matrix: *trace*.

**Spørgsmål:** Er afbildningen  $\text{Tr} : \mathbb{F}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{F}$  defineret ved  $\mathbf{A} \mapsto \text{Tr}(\mathbf{A})$  en lineær afbildning?

**Svar:** For at finde ud af, om sporaftbildningen  $\text{Tr} : \mathbb{F}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{F}$  som defineret ovenfor, er lineær, tjekker vi, om alle betingelser i Definition 10.0.1 er opfyldt. Ved at anvende notationen fra Definition 10.0.1 har vi  $V_1 = \mathbb{F}^{n \times n}$  og  $V_2 = \mathbb{F}$ . Vi bør først tjekke, at disse er vektorrum over et legeme  $\mathbb{F}$ . Det viser sig, at begge er vektorrum over  $\mathbb{F}$ , hvilket for  $V_1$  ses i Eksempel 9.1.4 med  $m = n$ , og hvilket for  $V_2$  ses i Eksempel 9.1.1 med  $n = 1$ .

Nu skal vi tjekke, om  $\text{Tr}$  opfylder de to betingelser fra Definition 10.0.1. Lad os vælge vilkårlige  $c \in \mathbb{F}$  og  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ . Derfor kan vi skrive

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Da gælder

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \dots & a_{nn} + b_{nn} \end{bmatrix}$$

og

$$c \cdot \mathbf{u} = c \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \cdot a_{11} & \dots & c \cdot a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c \cdot a_{n1} & \dots & c \cdot a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Derfor er

$$\text{Tr}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a_{11} + b_{11} + \dots + a_{nn} + b_{nn} = a_{11} + \dots + a_{nn} + b_{11} + \dots + b_{nn} = \text{Tr}(\mathbf{u}) + \text{Tr}(\mathbf{v})$$

og

$$\text{Tr}(c \cdot \mathbf{u}) = c \cdot a_{11} + \dots + c \cdot a_{nn} = c \cdot (a_{11} + \dots + a_{nn}) = c \cdot \text{Tr}(\mathbf{u}).$$

Vi konkluderer, at  $\text{Tr} : \mathbb{F}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{F}$  defineret ved  $\mathbf{A} \mapsto \text{Tr}(\mathbf{A})$  er en lineær afbildning.

**Eksempel 10.2.3**

Lad  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ , og betragt afbildningen  $m_5 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  defineret ved  $m_5(v_1, v_2) = (5v_1, 5v_2)$ . Med andre ord, effekten af afbildning  $m_5$  på en vektor er, at vektoren ganges med skalar 5. Visuelt betyder dette, at retningen af en vektor ikke ændres, men at den bliver fem gange længere. Man kan vise, at dette er en lineær afbildning mellem reelle vektorrum.

Mere generelt kan man vise, at hvis  $\mathbb{F}$  er et legeme, og  $c \in \mathbb{F}$  er en skalar, så er afbildningen  $m_c : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  defineret ved  $m_c(\mathbf{u}) = c \cdot \mathbf{u}$  en lineær afbildning mellem vektorrum.

**Eksempel 10.2.4**

Betragt for  $\alpha \in \mathbb{R}$  afbildningen  $R_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  defineret ved  $R_\alpha(v_1, v_2) = (\cos(\alpha) \cdot v_1 - \sin(\alpha) \cdot v_2, \sin(\alpha) \cdot v_1 + \cos(\alpha) \cdot v_2)$ . Geometrisk er effekten af  $R_\alpha$  på  $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$  en rotation mod uret om  $(0, 0)$  med vinklen  $\alpha$ . For eksempel, hvis  $\alpha = \pi/2$ , så er  $R_{\pi/2}(v_1, v_2) = (-v_2, v_1)$ . Man kan vise, at  $R_\alpha$  er en lineær afbildning.

**Eksempel 10.2.5**

Vi vælger  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ . Lad  $V_1$  være mængden af polynomier i  $\mathbb{C}[Z]$  af grad højst tre, og lad  $V_2$  være mængden af polynomier i  $\mathbb{C}[Z]$  af grad højst fire. Både  $V_1$  og  $V_2$  er vektorrum over  $\mathbb{C}$ . En mulig basis for  $V_1$  er givet ved mængden  $\{1, Z, Z^2, Z^3\}$ , mens en basis for  $V_2$  er  $\{1, Z, Z^2, Z^3, Z^4\}$ . Derfor er  $\dim V_1 = 4$  og  $\dim V_2 = 5$ . Definér nu afbildningen  $L : V_1 \rightarrow V_2$  ved  $p(Z) \mapsto (i + 2Z) \cdot p(Z)$ . Bemærk, at vi for ethvert  $p(Z) \in V_1$  har  $(i + 2Z) \cdot p(Z) \in V_2$  ved brug af Ligning (4.1). Man kan vise, at  $L$  er en lineær afbildning. Hvis  $p_1(Z), p_2(Z) \in V_1$ , og  $c \in \mathbb{C}$ , så gælder der nemlig, at

$$\begin{aligned} L(p_1(Z) + p_2(Z)) &= (i + 2Z) \cdot (p_1(Z) + p_2(Z)) \\ &= (i + 2Z) \cdot p_1(Z) + (i + 2Z) \cdot p_2(Z) \\ &= L(p_1(Z)) + L(p_2(Z)) \end{aligned}$$

og

$$L(c \cdot p_1(Z)) = (i + 2Z) \cdot c \cdot p_1(Z) = c \cdot (i + 2Z) \cdot p_1(Z) = c \cdot L(p_1(Z)).$$

**Eksempel 10.2.6**

Som et afsluttende eksempel på en lineær afbildning betragter vi afbildningen  $ev : \mathbb{C}[Z] \rightarrow \mathbb{C}^2$  defineret ved  $p(Z) \mapsto (p(0), p(1))$ . For eksempel er  $ev(Z^2 + Z + 1) = (0^2 + 0 + 1, 1^2 + 1 + 1) = (1, 3)$ . Man kan vise, at  $ev$  er en lineær afbildning.

Vi afslutter dette afsnit med nogle generelle egenskaber ved lineære afbildninger. Først ser vi på sammensætningen af to lineære afbildninger. Det vil være en fordel, hvis læseren først genopfrisker Afsnit 2.2, hvor vi definerede sammensætningen af to funktioner.

**Sætning 10.2.1**

Lad  $\mathbb{F}$  være et legeme og  $V_1, V_2, V_3$  vektorrum over  $\mathbb{F}$ . Antag yderligere, at  $L_1 : V_1 \rightarrow V_2$ , og  $L_2 : V_2 \rightarrow V_3$  er lineære afbildninger. Da er sammensætningen  $L_2 \circ L_1 : V_1 \rightarrow V_3$  også en

lineær afbildning.

*Bevis.* Lad os vælge vilkårlige  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_1$  og  $c \in \mathbb{F}$ . Ved at udnytte lineariteten af  $L_1$  og  $L_2$  samt definitionen af sammensætningen af to funktioner får vi

$$\begin{aligned} (L_2 \circ L_1)(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= L_2(L_1(\mathbf{u} + \mathbf{v})) \\ &= L_2(L_1(\mathbf{u}) + L_1(\mathbf{v})) \\ &= L_2(L_1(\mathbf{u})) + L_2(L_1(\mathbf{v})) \\ &= (L_2 \circ L_1)(\mathbf{u}) + (L_2 \circ L_1)(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

og

$$(L_2 \circ L_1)(c \cdot \mathbf{u}) = L_2(L_1(c \cdot \mathbf{u})) = L_2(c \cdot L_1(\mathbf{u})) = c \cdot L_2(L_1(\mathbf{u})) = c \cdot (L_2 \circ L_1)(\mathbf{u}).$$

Ifølge Definition 10.0.1 er afbildningen  $L_2 \circ L_1 : V_1 \rightarrow V_3$  dermed en lineær afbildning.  $\square$

Da enhver funktion  $f : A \rightarrow B$  har et billede, nemlig mængden  $\text{image}(f) = \{f(a) \mid a \in A\}$  som behandlet i Afsnit 2.2, har en lineær afbildning  $L : V_1 \rightarrow V_2$  også et billede. I lyset af Lemma 10.1.4 generaliserer dette ideen om søjlerummet af en matrix til rammerne af generelle lineære afbildninger. Man kan vise, at billedet af en lineær afbildning  $L : V_1 \rightarrow V_2$  er et underrum i  $V_2$ . Begrebet kerne kan også generaliseres.

### Definition 10.2.1

Lad  $\mathbb{F}$  være et legeme,  $V_1$  og  $V_2$  vektorrum over  $\mathbb{F}$  og  $L : V_1 \rightarrow V_2$  en lineær afbildning. Da er *kernen* af afbildningen  $L$ :

$$\ker L = \{\mathbf{v} \in V_1 \mid L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}.$$

På samme måde som for kernen af en matrix kan man vise, at kernen af en lineær afbildning  $L : V_1 \rightarrow V_2$  er et underrum i  $V_1$ .

### Eksempel 10.2.7

Lad os genbesøge Eksempel 10.2.1. Vi betragtede den lineære afbildning  $D : \mathbb{C}[Z] \rightarrow \mathbb{C}[Z]$ , der sender et polynomium  $p(Z)$  til dets afledte. De eneste polynomier, hvis afledte er 0, er konstante polynomier, det vil sige polynomier på formen  $p(Z) = a_0$ . Derfor er  $\ker D = \{a_0 \mid a_0 \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}$ . Bemærk, at  $\{1\}$  er en basis for  $\ker D$ , så vi kan konkludere, at  $\dim \ker D = 1$ .

Da denne teori senere vil blive anvendt i emnet om differentiaalligninger, tager vi her endnu et eksempel, der involverer afledte.

### Eksempel 10.2.8

Lad  $C_\infty(\mathbb{R})$  være vektorrummet af alle uendeligdifferentiable funktioner fra  $\mathbb{R}$  til  $\mathbb{R}$ , som behandlet i Eksempel 9.3.4. Lad os betragte afbildningen  $L : C_\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C_\infty(\mathbb{R})$ , hvor

$f \mapsto f' - f$ . Som sædvanlig betegner  $f'$  den afledte af funktionen  $f$ . Da  $f \in C_\infty(\mathbb{R})$ , er også  $f'$  uendeligdifferentiabel, således at  $f' \in C_\infty(\mathbb{R})$ . Man kan vise, at  $L$  er en lineær afbildning. Ved at bruge Definition 10.2.1 ser vi, at  $\ker L = \{f \in C_\infty(\mathbb{R}) \mid f' - f = 0\}$ . Med andre ord: kernen af  $L$  består af de funktioner  $f \in C_\infty(\mathbb{R})$ , der opfylder, at den afledte af  $f$  er den samme som  $f$  selv. Med endnu andre ord: kernen af  $L$  består af alle funktioner i  $C_\infty(\mathbb{R})$ , som er løsninger til differentialligningen  $f' = f$ . Et eksempel på en funktion, der opfylder denne differentialligning, er eksponentialfunktionen  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  defineret ved  $t \mapsto e^t$ . Også alle skaleringer  $f = c \cdot \exp$  med  $c \in \mathbb{R}$  er løsninger til differentialligningen  $f' = f$ . Det er muligt at vise, at der ikke er flere løsninger i  $C_\infty(\mathbb{R})$  end disse. Derfor er  $\ker L$  et endimensionelt underrum i  $C_\infty(\mathbb{R})$  med basis  $\{\exp\}$ .

### Bemærkning 10.2.1

Eksponentialfunktionen blev også diskuteret i Eksempel 2.3.2, men dens dispositionsmængde blev dér defineret til  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ . Strengt taget er eksponentialfunktionen fra Eksempel 2.3.2 derfor ikke den samme funktion som eksponentialfunktionen i dette eksempel. Da begge funktioner afbilder ethvert  $x \in \mathbb{R}$  til nøjagtig den samme værdi, nemlig  $e^x$ , er det dog en smule overflødigt at anvende forskellige notationssystemer for disse funktioner. Af denne grund vil vi gennemgående betegne begge funktioner ved  $\exp$ .

### Eksempel 10.2.9

Som et sidste eksempel på kernen af en lineær afbildning tager vi et kig på afbildningen  $ev$  fra Eksempel 10.2.6. Afbildningen  $ev : \mathbb{C}[Z] \rightarrow \mathbb{C}^2$  blev dér defineret ved  $p(Z) \mapsto (p(0), p(1))$ . Derfor har vi

$$\ker ev = \{p(Z) \in \mathbb{C}[Z] \mid (p(0), p(1)) = (0, 0)\} = \{p(Z) \in \mathbb{C}[Z] \mid p(0) = 0 \wedge p(1) = 0\}.$$

Det er muligt at beskrive kernen af  $ev$  mere specifikt. Lad os starte med at beskrive mængden af polynomier  $p(Z)$ , der opfylder  $p(0) = 0$ , altså alle de polynomier  $p(Z)$ , der har værdien 0 som en rod. Ved at benytte Lemma 4.6.2 konkluderer vi, at

$$\{p(Z) \in \mathbb{C}[Z] \mid p(0) = 0\} = \{Z \cdot q(Z) \mid q(Z) \in \mathbb{C}[Z]\}.$$

Hvis både  $p(0) = 0$ , og  $p(1) = 0$ , så har vi, at  $p(Z) = Z \cdot q(Z)$  for et  $q(Z) \in \mathbb{C}[Z]$ , og  $p(1) = 0$ . Men dette er ækvivalent med at sige, at  $p(Z) = Z \cdot q(Z)$  for et  $q(Z) \in \mathbb{C}[Z]$ , og  $q(1) = 0$ . Anvendes Lemma 4.6.2 igen men nu for  $q(Z)$  og roden 1 ser vi, at  $q(Z) = (Z - 1) \cdot s(Z)$  for et  $s(Z) \in \mathbb{C}[Z]$ . Derfor får vi, at  $p(Z) \in \ker ev$ , hvis og kun hvis  $p(Z) = Z \cdot (Z - 1) \cdot s(Z)$  for et  $s(Z) \in \mathbb{C}[Z]$ . Vi konkluderer derfor, at

$$\ker ev = \{p(Z) \in \mathbb{C}[Z] \mid p(0) = 0 \wedge p(1) = 0\} = \{Z \cdot (Z - 1) \cdot s(Z) \mid s(Z) \in \mathbb{C}[Z]\}.$$

### 10.3 Lineære afbildninger mellem endeligdimensionelle vektorrum

Lad os antage, at vi er givet et endeligdimensionelt vektorrum  $V$  over et legeme  $\mathbb{F}$ , hvor vi for eksempel har  $\dim V = n$ . Da kan vi vælge en ordnet basis for  $V$ , som vi kan kalde  $\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ , hvor  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  er lineært uafhængige vektorer i  $V$ . Som vi har set i Definition 9.2.4, kan vi for alle  $\mathbf{v} \in V$  producere en unik koordinatvektor  $[\mathbf{v}]_\beta \in \mathbb{F}^n$ . Dette betyder, at vi kan definere en funktion  $\phi_\beta : V \rightarrow \mathbb{F}^n$  ved  $\mathbf{v} \mapsto [\mathbf{v}]_\beta$ . Ved at kombinere Lemma 9.2.2 og Definition 10.0.1 konkluderer vi straks, at funktionen  $\phi_\beta$  er en lineær afbildning. For en givet vektor  $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{F}^n$  er det nemt at opskrive en vektor i  $V$ , der har  $(c_1, \dots, c_n)$  som sin koordinatvektor (med hensyn til basis  $\beta$ ). Denne vektor er nemlig netop vektoren  $\mathbf{v} = c_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + c_n \cdot \mathbf{v}_n$ , og denne er ifølge Lemma 9.2.1 den eneste vektor, der har koordinaterne  $(c_1, \dots, c_n)$ ! Det, vi rent faktisk har opnået her, er den inverse funktion af  $\phi_\beta$ . Lad os formulere disse udsagn i et lemma og give en fuldstændig bevis.

#### Lemma 10.3.1

Lad  $\mathbb{F}$  være et legeme,  $V$  et vektorrum over  $\mathbb{F}$  med dimension  $n$  og  $\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  en ordnet basis for  $V$ . Da er funktionen  $\phi_\beta : V \rightarrow \mathbb{F}^n$  defineret ved  $\mathbf{v} \mapsto [\mathbf{v}]_\beta$  en lineær afbildning. Desuden er funktionen  $\psi_\beta : \mathbb{F}^n \rightarrow V$  defineret ved  $(c_1, \dots, c_n) \mapsto c_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + c_n \cdot \mathbf{v}_n$  den inverse af  $\phi_\beta$  og også en lineær afbildning.

*Bevis.* Vi har allerede vist i diskussionen forinden dette lemma, at  $\phi_\beta : V \rightarrow \mathbb{F}^n$  er en lineær afbildning mellem vektorrum over  $\mathbb{F}$ . Lad os nu ved  $\psi_\beta : \mathbb{F}^n \rightarrow V$  betegne den afbildning, der er defineret ved  $(c_1, \dots, c_n) \mapsto c_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + c_n \cdot \mathbf{v}_n$ . Vi skal først sikre os, at  $\psi_\beta$  er den inverse funktion  $\phi_\beta^{-1}$ , hvilket vil betyde, at  $\psi_\beta \circ \phi_\beta(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$  for alle  $\mathbf{v} \in V$ , samt at  $\phi_\beta \circ \psi_\beta(c_1, \dots, c_n) = (c_1, \dots, c_n)$  for alle  $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{F}^n$ . Vi ser, at dette er opfyldt, da

$$(\psi_\beta \circ \phi_\beta)(\mathbf{v}) = \psi_\beta([\mathbf{v}]_\beta) = \mathbf{v}$$

og

$$(\phi_\beta \circ \psi_\beta)(c_1, \dots, c_n) = \phi_\beta(c_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + c_n \cdot \mathbf{v}_n) = (c_1, \dots, c_n).$$

Der er nu kun tilbage at kontrollere, om  $\psi_\beta$  er en lineær afbildning, hvilket vi overlader til læseren.  $\square$

Årsagen til, at de lineære afbildninger  $\phi_\beta$  og  $\psi_\beta$  er så nyttige, er, at de kan anvendes til at beskrive en generel lineær afbildning mere eksplicit. Lad os antage, at vi er givet en lineær afbildning  $L : V_1 \rightarrow V_2$  som i Definition 10.0.1, og at vi ved, at både  $V_1$  og  $V_2$  er endeligdimensionelle vektorrum, for eksempel med  $\dim V_1 = n$  og  $\dim V_2 = m$ . Vi kan så vælge en ordnet basis for  $V_1$ , lad os sige  $\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ , hvor  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  er lineært uafhængige vektorer i  $V_1$ . På samme måde kan vi vælge en ordnet basis for  $V_2$ , for eksempel  $\gamma = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$ , hvor  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m \in V_2$  er lineært uafhængige vektorer i  $V_2$ . Pointen er nu, at vi i stedet for at arbejde med den abstrakte lineære afbildning  $L : V_1 \rightarrow V_2$  kan vælge at arbejde med funktionen  $\phi_\gamma \circ L \circ \psi_\beta : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ . Effekten er, at de abstrakte vektorrum  $V_1$  og

$V_2$  er blevet erstattet af de mere håndgribelige vektorrum  $\mathbb{F}^n$  og  $\mathbb{F}^m$ . Ved at benytte Sætning 10.2.1 i kombination med Lemma 10.3.1 kan vi konkludere, at funktionen  $\phi_\gamma \circ L \circ \psi_\beta$  rent faktisk er en lineær afbildning mellem vektorrum over  $\mathbb{F}$ , da det er sammensætningen af lineære afbildninger.

Vi har i Afsnit 10.1 set, at enhver matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$  giver anledning til en lineær afbildning  $L_{\mathbf{A}} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ , ved at der defineres  $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$ . Faktisk er enhver lineær afbildning fra  $\mathbb{F}^n$  til  $\mathbb{F}^m$  af denne form. Lad os vise dette nu:

### Lemma 10.3.2

Lad  $\mathbb{F}$  være et legeme og  $\tilde{L} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$  en lineær afbildning. Da findes der præcis én matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$ , således at  $\tilde{L} = L_{\mathbf{A}}$ . Betegnes standardbasisvektorerne for  $\mathbb{F}^n$  ved  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ , så udgøres søjlerne i matricen  $\mathbf{A}$  af  $\tilde{L}(\mathbf{e}_1), \dots, \tilde{L}(\mathbf{e}_n)$ .

*Bevis.* Hvis  $\mathbf{v} = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{F}^n$ , så er  $\mathbf{v} = c_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \dots + c_n \cdot \mathbf{e}_n$ , da den  $i$ 'te standardbasisvektor for  $\mathbb{F}^n$  har et ettal som koordinat  $i$  og nuller derudover. Da  $\tilde{L}$  er en lineær afbildning, har vi  $\tilde{L}(\mathbf{v}) = \tilde{L}(c_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \dots + c_n \cdot \mathbf{e}_n) = c_1 \cdot \tilde{L}(\mathbf{e}_1) + \dots + c_n \cdot \tilde{L}(\mathbf{e}_n)$ . Derfor opfylder matricen  $\mathbf{A}$  med søjlerne  $\tilde{L}(\mathbf{e}_1), \dots, \tilde{L}(\mathbf{e}_n)$ , at  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = c_1 \cdot \tilde{L}(\mathbf{e}_1) + \dots + c_n \cdot \tilde{L}(\mathbf{e}_n) = \tilde{L}(\mathbf{v})$ . Dette viser, at  $\tilde{L} = L_{\mathbf{A}}$ .

Det, der er tilbage at vise, er, at matricen  $\mathbf{A}$  er unik. Antag, at der findes en anden matrix  $\mathbf{B} \in \mathbb{F}^{m \times n}$ , således at  $\tilde{L} = L_{\mathbf{B}}$ . Vi vil vise, at  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ . Hvis  $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$ , vil det være muligt at finde en søjle, lad os kalde den søjle  $i$ , for hvilken matricerne  $\mathbf{A}$  og  $\mathbf{B}$  er forskellige. Bemærk, at den  $i$ 'te søjle i  $\mathbf{A}$  er lig med  $\tilde{L}(\mathbf{e}_i)$  grundet konstruktionen af matricen  $\mathbf{A}$ . På den anden side er  $\tilde{L}(\mathbf{e}_i) = L_{\mathbf{B}}(\mathbf{e}_i) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_i$ , hvilket netop er den  $i$ 'te søjle i  $\mathbf{B}$ . Tilsyneladende er den  $i$ 'te søjle i  $\mathbf{A}$  og  $\mathbf{B}$  begge lig med  $L(\mathbf{e}_i)$  og altså alligevel ikke forskellige. Denne modstrid viser, at antagelsen  $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$  ikke kan være gyldig, og derfor at  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ .  $\square$

Vi vil for en givet lineær afbildning  $L : V_1 \rightarrow V_2$  anvende dette lemma på den tilknyttede lineære afbildning  $\tilde{L} = \phi_\gamma \circ L \circ \psi_\beta : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ . Lad os, før vi fortsætter med den generelle teori, først gennemgå et eksempel.

### Eksempel 10.3.1

Vi genbesøger Eksempel 10.2.5. I det eksempel var  $V_1$  vektorrummet bestående af polynomier i  $\mathbb{C}[Z]$  af højst tredje grad og  $V_2$  vektorrummet af polynomier i  $\mathbb{C}[Z]$  af højst fjerde grad. Derfor kan vi som ordnet basis for  $V_1$  vælge  $\beta = (1, Z, Z^2, Z^3)$ , mens en mulig ordnet basis for  $V_2$  er givet ved  $\gamma = (1, Z, Z^2, Z^3, Z^4)$ . Den lineære afbildning  $L : V_1 \rightarrow V_2$  beskrevet i Eksempel 10.2.5 afbildede et polynomium  $p(Z)$  til  $(i + 2Z) \cdot p(Z)$ .

Lad os starte med at forklare, hvad den lineære afbildning  $\phi_\gamma : V_2 \rightarrow \mathbb{F}^5$  er i dette tilfælde. Et element i  $V_2$  er et polynomium af højst fjerde grad. Derfor er  $\mathbf{v} \in V_2$  et polynomium på formen  $a_0 + a_1Z + \dots + a_4Z^4$  med  $a_0, a_1, \dots, a_4 \in \mathbb{C}$ , hvilket allerede er skrevet som en linearkombination af vektorerne i den ordnede basis  $(1, Z, \dots, Z^4)$ . Derfor er



$\phi_\gamma(a_0 + a_1Z + \dots + a_4Z^4) = (a_0, a_1, \dots, a_4)$ , i vektornotation:

$$\phi_\gamma(a_0 + a_1Z + \dots + a_4Z^4) = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_4 \end{bmatrix}.$$

Ligeledes har vi

$$\psi_\beta \left( \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \right) = b_0 + b_1Z + b_2Z^2 + b_3Z^3.$$

Vi kan beskrive den lineære afbildning  $L$  ved at undersøge, hvad der sker med basisvektorerne i den valgte ordnede basis  $\beta$ , når de passerer igennem afbildningen  $L$ . Det gøres nemmest ved at udtrykke resultatet som en linearkombination af basisvektorerne i den valgte ordnede basis  $\gamma$ . Vi får:

$$\begin{aligned} L(1) &= (i + 2Z) \cdot 1 = i + 2Z, & L(Z) &= (i + 2Z) \cdot Z = iZ + 2Z^2, \\ L(Z^2) &= (i + 2Z) \cdot Z^2 = iZ^2 + 2Z^3, & L(Z^3) &= (i + 2Z) \cdot Z^3 = iZ^3 + 2Z^4. \end{aligned}$$

Lad os nu bestemme matricen  $\mathbf{A}$  beskrevet i Lemma 10.3.2. Vi skal udregne  $\tilde{L}(\mathbf{e}_i)$  for  $i = 1, \dots, 4$ , hvor  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$  er den ordnede standardbasis i  $\mathbb{F}^4$ , og  $\tilde{L} = \phi_\gamma \circ L \circ \psi_\beta : \mathbb{F}^4 \rightarrow \mathbb{F}^5$ . Da får vi:

$$\begin{aligned} \tilde{L}(\mathbf{e}_1) &= (\phi_\gamma \circ L \circ \psi_\beta)(\mathbf{e}_1) = (\phi_\gamma \circ L \circ \psi_\beta) \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= (\phi_\gamma \circ L)(1) \\ &= \phi_\gamma(i + 2Z) \\ &= \begin{bmatrix} i \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

og tilsvarende

$$\tilde{L}(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{L}(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \tilde{L}(\mathbf{e}_4) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ved anvendelse af Lemma 10.3.2 har vi  $\tilde{L} = \phi_\gamma \circ L \circ \psi_\beta = L_{\mathbf{A}}$ , hvor

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 2 & i & 0 & 0 \\ 0 & 2 & i & 0 \\ 0 & 0 & 2 & i \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

### Definition 10.3.1

Lad  $\mathbb{F}$  være et legeme og  $L : V_1 \rightarrow V_2$  en lineær afbildning mellem to endeligdimensionelle vektorrum med  $\dim V_1 = n$  og  $\dim V_2 = m$ . Lad desuden  $\beta$  være en ordnet basis for  $V_1$  og  $\gamma$  en ordnet basis for  $V_2$ . Da betegner vi ved  ${}_\gamma[L]_\beta \in \mathbb{F}^{m \times n}$  matricen beskrevet i Lemma 10.3.2, når den anvendes på den lineære afbildning  $\tilde{L} = \phi_\gamma \circ L \circ \psi_\beta : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ . Matricen  ${}_\gamma[L]_\beta$  kaldes *matrixrepræsentationen* af eller alternativt *afbildningsmatricen* for  $L$  med hensyn til de ordnede baser  $\beta$  og  $\gamma$ .

Bemærk, at begrebet afbildningsmatrix på engelsk kaldes *mapping matrix*. For at undgå unødvendige beregninger vil vi beskrive afbildningsmatricen  ${}_\gamma[L]_\beta$  mere direkte:

### Lemma 10.3.3

Lad  $\mathbb{F}$  være et legeme og  $L : V_1 \rightarrow V_2$  en lineær afbildning mellem to endeligdimensionelle vektorrum med  $\dim V_1 = n$  og  $\dim V_2 = m$ . Lad desuden  $\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  være en ordnet basis for  $V_1$  og  $\gamma$  en ordnet basis for  $V_2$ . Da har afbildningsmatricen for  $L$  med hensyn til de ordnede baser  $\beta$  og  $\gamma$  billedvektorerne  $[L(\mathbf{v}_1)]_\gamma, \dots, [L(\mathbf{v}_n)]_\gamma$  som søjler. Det vil sige:

$${}_\gamma[L]_\beta = [[L(\mathbf{v}_1)]_\gamma \cdots [L(\mathbf{v}_n)]_\gamma].$$

*Bevis.* Ved at kombinere Definition 10.3.1 og Lemma 10.3.2 ser vi, at  ${}_\gamma[L]_\beta$  har søjlerne  $\tilde{L}(\mathbf{e}_1), \dots, \tilde{L}(\mathbf{e}_n)$ , hvor  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  er standardbasisvektorerne for  $\mathbb{F}^n$ , og  $\tilde{L} = \phi_\gamma \circ L \circ \psi_\beta$ . Bemærk nu, at vi for alle  $i$  mellem 1 og  $n$  har  $\psi_\beta(\mathbf{e}_i) = \mathbf{v}_i$  ved brug af definitionen af  $\psi_\beta$  givet i Lemma 10.3.1. Yderligere er  $\phi_\gamma(\mathbf{w}) = [\mathbf{w}]_\gamma$  for alle  $\mathbf{w} \in V_2$  ved definitionen af afbildningen  $\phi_\beta$ . Derfor har vi for alle  $i$  mellem 1 og  $n$ , at

$$\tilde{L}(\mathbf{e}_i) = (\phi_\gamma \circ L \circ \psi_\beta)(\mathbf{e}_i) = (\phi_\gamma \circ L)(\mathbf{v}_i) = \phi_\gamma(L(\mathbf{v}_i)) = [L(\mathbf{v}_i)]_\gamma.$$

□

I Eksempel 10.3.1 bestemte vi matrixrepræsentationen af en lineær afbildning (matricen betegnet ved  $\mathbf{A}$  i eksemplet). Lad os gennemgå et par eksempler mere.

### Eksempel 10.3.2

Dette eksempel er en fortsættelse af Eksempel 10.2.4. Dér betragtede vi for  $\alpha \in \mathbb{R}$  den lineære afbildning  $R_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  defineret ved  $R_\alpha(v_1, v_2) = (\cos(\alpha) \cdot v_1 - \sin(\alpha) \cdot v_2, \sin(\alpha) \cdot v_1 + \cos(\alpha) \cdot v_2)$ . Ved at vælge den ordnede standardbasis  $\beta = \gamma = \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$  for  $\mathbb{R}^2$  for både definitionsområdet og dispositionsområdet for den lineære afbildning  $R_\alpha$ , opnår vi, at

$$\gamma[R_\alpha]_\beta = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}. \quad (10.4)$$

Pointen med at repræsentere en lineær afbildning  $L$  med matricen  $\gamma[L]_\beta$ , er, at strukturen af den oprindelige lineære afbildning er "inkodet" i denne matrix. Den følgende sætning gør dette mere præcist.

### Sætning 10.3.4

Lad  $\mathbb{F}$  være et legeme og  $V_1, V_2$  og  $V_3$  tre endeligdimensionelle vektorrum over  $\mathbb{F}$ . Lad desuden  $\beta, \gamma$  og  $\delta$  være ordnede baser for henholdsvis  $V_1, V_2$  og  $V_3$ . Da gælder der, at

- (i)  $[L(\mathbf{v})]_\gamma = \gamma[L]_\beta \cdot [\mathbf{v}]_\beta$  for enhver lineær afbildning  $L : V_1 \rightarrow V_2$  og enhver  $\mathbf{v} \in V_1$ .
- (ii)  $\delta[M \circ L]_\beta = \delta[M]_\gamma \cdot \gamma[L]_\beta$  for alle lineære afbildninger  $L : V_1 \rightarrow V_2$  og  $M : V_2 \rightarrow V_3$ .

*Bevis.* Vi beviser først det første punkt. Lad os skrive  $\mathbf{A} = \gamma[L]_\beta$  for nemheds skyld. Vi har set, at  $\phi_\gamma \circ L \circ \psi_\beta = L_{\mathbf{A}}$  ved brug af notationen fra Lemma 10.3.1. Derfor er  $\phi_\gamma \circ L = L_{\mathbf{A}} \circ (\psi_\beta)^{-1} = L_{\mathbf{A}} \circ \phi_\beta$ . Men så får vi for enhver  $\mathbf{v} \in V_1$ , at  $(\phi_\gamma \circ L)(\mathbf{v}) = (L_{\mathbf{A}} \circ \phi_\beta)(\mathbf{v})$ . En reduktion af venstre- og højresiden giver

$$(\phi_\gamma \circ L)(\mathbf{v}) = \phi_\gamma(L(\mathbf{v})) = [L(\mathbf{v})]_\gamma$$

og

$$(L_{\mathbf{A}} \circ \phi_\beta)(\mathbf{v}) = L_{\mathbf{A}}(\phi_\beta(\mathbf{v})) = L_{\mathbf{A}}([\mathbf{v}]_\beta) = \gamma[L]_\beta \cdot [\mathbf{v}]_\beta.$$

Derfor er  $[L(\mathbf{v})]_\gamma = \gamma[L]_\beta \cdot [\mathbf{v}]_\beta$ , hvilket er, hvad vi skulle vise.

Beviset for det andet punkt er lignende. Vi skriver  $\mathbf{A} = \gamma[L]_\beta$  og  $\mathbf{B} = \delta[M]_\gamma$  for nemheds skyld. Vi har  $L_{\mathbf{A}} = \phi_\gamma \circ L \circ \psi_\beta$  og  $L_{\mathbf{B}} = \phi_\delta \circ M \circ \psi_\gamma$ , hvilket medfører, at  $L_{\mathbf{B}} \circ L_{\mathbf{A}} = \phi_\delta \circ M \circ \psi_\gamma \circ \phi_\gamma \circ L \circ \psi_\beta$ . Ved at udnytte, at  $\psi_\gamma$  og  $\phi_\gamma$  er hinandens inverse jævnfør Lemma 10.3.1, får vi, at  $L_{\mathbf{B}} \circ L_{\mathbf{A}} = \phi_\delta \circ M \circ L \circ \psi_\beta$ . Vi har på den ene, at  $L_{\mathbf{B}} \circ L_{\mathbf{A}} = L_{\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}}$ , og på den anden side, at  $\phi_\delta \circ M \circ L \circ \psi_\beta = L_{\mathbf{C}}$ , hvor  $\mathbf{C} = \delta[M \circ L]_\beta$ . Dette medfører, at  $\delta[M \circ L]_\beta = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \delta[M]_\gamma \cdot \gamma[L]_\beta$ , hvilket er, hvad vi ønskede at vise.  $\square$

Det første punkt i denne sætning fortæller os simpelthen, at matricen  $\gamma[L]_\beta$  indeholder al den information, vi har brug for for at kunne beskrive den lineære afbildning  $L$ : at udregne  $L(\mathbf{v})$  og dernæst at udregne koordinatvektoren for resultatet med hensyn til den ordnede

basis  $\gamma$  for  $V_2$  er nøjagtig det samme som at gange matricen  $\gamma[L]_\beta$  med koordinatvektoren for  $\mathbf{v}$  med hensyn til den ordnede basis  $\beta$  for  $V_1$ . Det andet punkt siger, at sammensætning af lineære afbildninger opfører sig pænt med hensyn til matrixrepræsentationer. Lad os se på et eksempel på dette.

### Eksempel 10.3.3

Vi fortsætter med Eksempel 10.3.2. Vi har set, at hvis vi vælger  $\beta$  og  $\gamma$  til at være standardbasen for  $\mathbb{R}^2$ , så er  $\gamma[R_\alpha]_\beta$  som angivet i Ligning (10.4). Husk på, at afbildningen  $R_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  geometrisk kan forstås som en rotation om origo med vinklen  $\alpha$  mod uret. For eksempel svarer  $R_{\pi/2}$  til en rotation på  $\pi/2$  radianer (90 grader). Dette betyder, at  $R_{\pi/2} \circ R_{\pi/2} = R_\pi$ , altså en rotation på samlet  $\pi$  radianer (180 grader), hvorfor vi har, at  $R_\pi(v_1, v_2) = (-v_1, -v_2)$ . Lad os tjekke det andet punkt i Sætning 10.3.4 for  $V_1 = V_2 = V_3 = \mathbb{R}^2$ ,  $\beta = \gamma = \delta = \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$  og  $L = M = R_{\pi/2}$ . Så på den ene side har vi

$$\delta[R_{\pi/2}]_\gamma = \gamma[R_{\pi/2}]_\beta = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

og derfor

$$\delta[R_{\pi/2}]_\gamma \cdot \gamma[R_{\pi/2}]_\beta = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

På den anden side ser vi ved anvendelse af Ligning (10.4) med  $\alpha = \pi$ , at

$$\delta[R_{\pi/2} \circ R_{\pi/2}]_\beta = \delta[R_\pi]_\beta = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vi konkluderer, at vi ganske rigtigt har  $\delta[R_{\pi/2} \circ R_{\pi/2}]_\beta = \delta[R_{\pi/2}]_\gamma \cdot \gamma[R_{\pi/2}]_\beta$ , nøjagtigt som det bør være.

Ved at udføre samme udregninger for  $M = R_{\alpha_1}$  og  $L = R_{\alpha_2}$  og udnytte, at  $R_{\alpha_1} \circ R_{\alpha_2} = R_{\alpha_1 + \alpha_2}$ , opnår man, at

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha_1) & -\sin(\alpha_1) \\ \sin(\alpha_1) & \cos(\alpha_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\alpha_2) & -\sin(\alpha_2) \\ \sin(\alpha_2) & \cos(\alpha_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1 + \alpha_2) & -\sin(\alpha_1 + \alpha_2) \\ \sin(\alpha_1 + \alpha_2) & \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \end{bmatrix}.$$

Denne identitet medfører faktisk additionsformlerne for cosinus og sinus, som vi benyttede i beviset af Lemma 3.4.1:

$$\cos(\alpha_1 + \alpha_2) = \cos(\alpha_1) \cos(\alpha_2) - \sin(\alpha_1) \sin(\alpha_2)$$

og

$$\sin(\alpha_1 + \alpha_2) = \sin(\alpha_1) \cos(\alpha_2) + \cos(\alpha_1) \sin(\alpha_2).$$

**Eksempel 10.3.4**

Lad  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  og  $V_1 = \mathbb{R}^2$ ,  $V_2 = \mathbb{R}^2$ , og lad

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Betegn ved  $L_{\mathbf{A}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  den lineære afbildning defineret ved  $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$ . Vi har for eksempel

$$L_{\mathbf{A}} \left( \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

og

$$L_{\mathbf{A}} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

**Spørgsmål:**

- (a) Vælg de ordnede standardbaser  $\beta = \gamma = \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$  for  $V_1$  og  $V_2$ , og bestem  ${}_{\gamma}[L_{\mathbf{A}}]_{\beta}$ .
- (b) Vælg de ordnede standardbaser  $\beta = \gamma = \left( \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$  for  $V_1$  og  $V_2$ , og bestem  ${}_{\gamma}[L_{\mathbf{A}}]_{\beta}$ .

**Svar:**

- (a) Da  $\gamma$  er valgt som standardbasen, og

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = v_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

har vi, at  $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}_{\gamma} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$  for alle  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ . Ved brug af Lemma 10.3.3 får vi, at

$${}_{\gamma}[L_{\mathbf{A}}]_{\beta} = [L_{\mathbf{A}}(\mathbf{e}_1)]_{\gamma} [L_{\mathbf{A}}(\mathbf{e}_2)]_{\gamma} = [L_{\mathbf{A}}(\mathbf{e}_1) \ L_{\mathbf{A}}(\mathbf{e}_2)] = [\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_1 \ \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}.$$

Man kan faktisk på en lignende måde se, at man for ethvert legeme  $\mathbb{F}$  og enhver matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$  har  ${}_{\gamma}[L_{\mathbf{A}}]_{\beta} = \mathbf{A}$ , hvis  $\beta$  og  $\gamma$  er de ordnede standardbaser for  $\mathbb{F}^m$ , henholdsvis  $\mathbb{F}^n$ .

- (b) Nu vælger vi de ordnede baser  $\beta = \gamma = \left( \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$  for  $V_1$  og  $V_2$ . Ved brug af Lemma 10.3.3 har vi, at

$${}_{\gamma}[L_{\mathbf{A}}]_{\beta} = \left[ L_{\mathbf{A}} \left( \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) \right]_{\gamma} \left[ L_{\mathbf{A}} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \right]_{\gamma} = \left[ \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right]_{\gamma} \left[ \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right]_{\gamma}$$

$$= \left[ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}_\gamma \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}_\gamma \right].$$

For at bestemme  $[\mathbf{w}]_\gamma$  for en  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$  skal man generelt løse et lineært ligningssystem. Mere præcist, hvis vi skriver  $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ , er målet at finde nogle  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^2$ , således at

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = c_1 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Derfor skal vi løse systemet af lineære ligninger i de ubekendte  $c_1$  og  $c_2$  givet ved:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}.$$

Dette kan i princippet gøres ved anvendelse af teorien fra Kapitel 6, alternativt ved at multiplicere systemet på begge sider af lighedstegnet med matricen.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi er dog heldige i dette tilfælde, da vi direkte kan se, at

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = (-1) \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{og derfor} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}_\gamma = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

samt

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{hvilket medfører} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}_\gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Vi konkluderer, at

$$\gamma[L_{\mathbf{A}}]_\beta = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Resultatet er en overraskende pæn matrix, nemlig en diagonalmatrix (se Definition 8.1.3).

Som det sidste i dette afsnit betragter vi matricer på formen  $\gamma[L]_\beta$  i et scenarie, hvor  $L$  er identitetsafbildningen fra et vektorrum  $V$  til sig selv:  $\text{id}_V : V \rightarrow V, \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}$ . Her er  $\beta$  og  $\gamma$  to, muligvis forskellige, ordnede baser for  $V$ . Fra den første del af Sætning 10.3.4 ser vi, at

$$\gamma[\text{id}_V]_\beta \cdot [\mathbf{v}]_\beta = [\mathbf{v}]_\gamma \quad \text{for alle } \mathbf{v} \in V. \quad (10.5)$$

I ord siger Ligning (10.5), at hvis man ganger matricen  $\gamma[\text{id}_V]_\beta$  med  $\beta$ -koordinatvektoren af en vektor  $\mathbf{v}$  i  $V$ , er resultatet  $\gamma$ -koordinatvektoren af  $\mathbf{v}$ . Af denne grund kaldes matricen  $\gamma[\text{id}_V]_\beta$  for en *koordinatskiftematrix*, alternativt en *basisskiftematrix*. Bemærk, at disse begreber på engelsk kaldes *change-of-coordinates matrix*, henholdsvis *change-of-basis matrix*.

**Eksempel 10.3.5**

Lad  $V = \{p(Z) \in \mathbb{C}[Z] \mid \deg p(Z) \leq 3\}$ .  $\beta = (1, Z, Z^2, Z^3)$  og  $\gamma = (Z^3, Z^2, Z, 1)$  er to ordnede baser for  $V$ .

**Spørgsmål:** Bestem den tilsvarende koordinatskiftematrix  ${}_{\gamma}[\text{id}_V]_{\beta}$ .

**Svar:** Lemma 10.3.3 fortæller, at vi skal bestemme  $[1]_{\gamma}$ ,  $[Z]_{\gamma}$ ,  $[Z^2]_{\gamma}$  og  $[Z^3]_{\gamma}$  for at løse opgaven. Da den eneste forskel mellem  $\beta$  og  $\gamma$  er rækkefølgen på basisvektorerne, er dette ikke så svært at gøre. For eksempel er

$$[1]_{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

da 1 er den fjerde basisvektor i  $\gamma$ . Ved at fortsætte på samme måde for de andre basisvektorer opnår man den ønskede koordinatskiftematrix:

$${}_{\gamma}[\text{id}_V]_{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi afslutter dette afsnit med nogle fakta om koordinatskiftematricer, der vil vise sig nyttige senere hen.

**Lemma 10.3.5**

Lad  $\mathbb{F}$  være et legeme,  $V$  et vektorrum over  $\mathbb{F}$  af endelig dimension  $n$  og  $\beta, \gamma$  samt  $\delta$  ordnede baser i  $V$ . Da gælder

- (i)  ${}_{\delta}[\text{id}_V]_{\gamma} \cdot {}_{\gamma}[\text{id}_V]_{\beta} = {}_{\delta}[\text{id}_V]_{\beta}$ ,
- (ii)  ${}_{\beta}[\text{id}_V]_{\beta} = \mathbf{I}_n$ , hvor  $\mathbf{I}_n$  betegner  $n \times n$ -identitetsmatricen, og
- (iii)  $({}_{\gamma}[\text{id}_V]_{\beta})^{-1} = {}_{\beta}[\text{id}_V]_{\gamma}$ .

*Bevis.* Det første punkt følger direkte fra punkt to i Sætning 10.3.4. Det andet punkt gælder klart, da koordinaterne af en vektor med hensyn til  $\beta$  ikke ændrer sig, hvis den ordnede basis  $\beta$  ikke ændres. Bemærk for det tredje punkt, at vi ifølge den første og anden del af sætningen har  ${}_{\gamma}[\text{id}_V]_{\beta} \cdot {}_{\beta}[\text{id}_V]_{\gamma} = {}_{\gamma}[\text{id}_V]_{\gamma} = \mathbf{I}_n$  og på samme måde  ${}_{\beta}[\text{id}_V]_{\gamma} \cdot {}_{\gamma}[\text{id}_V]_{\beta} = {}_{\beta}[\text{id}_V]_{\beta} = \mathbf{I}_n$ . Derfor er  $({}_{\gamma}[\text{id}_V]_{\beta})^{-1} = {}_{\beta}[\text{id}_V]_{\gamma}$ .  $\square$

## 10.4 Anvendelser af matrixrepræsentationen af en lineær afbildning

Nu hvor vi har muligheden for at repræsentere lineære afbildninger mellem endeligdimensionelle vektorrum med en matrix, vil vi benytte dette til at beskrive mere detaljeret, hvordan man bestemmer kernen og billedet af en lineær afbildning. Vi starter med en mere generel beskrivelse af løsninger til ligninger, der involverer en lineær afbildning.

### Sætning 10.4.1

Lad  $\mathbb{F}$  være et legeme og  $L : V_1 \rightarrow V_2$  en lineær afbildning mellem vektorrum over  $\mathbb{F}$ . Lad også en vektor  $\mathbf{w} \in V_2$  være givet, og definér  $S = \{\mathbf{v} \in V_1 \mid L(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\}$ . Da vil netop én af de følgende to scenarier forekomme:

- (i)  $S = \emptyset$ . Dette er tilfældet, hvis og kun hvis  $\mathbf{w} \notin \text{image}L$ .
- (ii)  $S = \{\mathbf{v}_p + \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in \ker L\}$ , hvor  $\mathbf{v}_p \in V_1$  er en vektor, således at  $L(\mathbf{v}_p) = \mathbf{w}$ .

*Bevis.* Hvis  $S = \emptyset$ , så har ligningen  $L(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$  ingen løsninger. Dette er ækvivalent med udsagnet om, at ingen vektor  $\mathbf{v} \in V_1$  afbildes til  $\mathbf{w}$ . Dette er igen det samme som at sige, at  $\mathbf{w}$  ikke er i billedet af  $L$ .

Hvis  $S \neq \emptyset$ , kan vi konkludere, at der findes en vektor  $\mathbf{v}_p \in V_1$ , således at  $L(\mathbf{v}_p) = \mathbf{w}$ . Hvis  $\tilde{\mathbf{v}}$  er en vektor, således at  $L(\tilde{\mathbf{v}}) = \mathbf{w}$ , så ser vi ved at bruge lineariteten af  $L$ , at  $L(\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v}_p) = \mathbf{w} - \mathbf{w} = \mathbf{0}$ . Derfor er  $\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v}_p \in \ker L$ . Da  $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_p + (\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v}_p)$ , og, som vi allerede har set,  $\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v}_p \in \ker L$ , viser dette, at  $S \subseteq \{\mathbf{v}_p + \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in \ker L\}$ . Omvendt, hvis en vektor er på formen  $\mathbf{v}_p + \mathbf{v}$  for et  $\mathbf{v} \in \ker L$ , så er  $L(\mathbf{v}_p + \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}_p) + L(\mathbf{v}) = \mathbf{w} + \mathbf{0} = \mathbf{w}$ . Dette viser, at  $\{\mathbf{v}_p + \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in \ker L\} \subseteq S$ . Ved at kombinere begge resultater, kan vi konkludere, at  $S = \{\mathbf{v}_p + \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in \ker L\}$ .  $\square$

Derfor er strukturen af løsningsmængden til en ligning på formen  $L(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$  fuldstændig bestemt. Vektoren  $\mathbf{v}_p$ , hvis en sådan eksisterer, kaldes en *partikulær løsning*. Bemærk, i hvor høj grad dette ligner Sætning 6.1.2. Det er ikke en tilfældighed. Løsningsmængden til et system af lineære ligninger med totalmatrix  $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$  er trods alt den samme som løsningsmængden til ligningen  $L_{\mathbf{A}}(\mathbf{v}) = \mathbf{b}$ . Desuden er  $\ker L_{\mathbf{A}}$  lig med løsningsmængden til det homogene system af lineære ligninger med koefficientmatrix  $\mathbf{A}$ . Derfor er Sætning 6.1.2 sådan set blot et særtilfælde af Sætning 10.4.1.

Hvis både  $V_1$  og  $V_2$  er endeligdimensionelle vektorrum, kan vi beregningsmæssigt løse en ligning på formen  $L(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$  ved at løse et passende system af lineære ligninger. Vi formulerer dette mere præcist i den følgende sætning.

### Sætning 10.4.2

Lad  $\mathbb{F}$  være et legeme og  $L : V_1 \rightarrow V_2$  en lineær afbildning mellem endeligdimensionelle



vektorrum over  $\mathbb{F}$ . Lad  $\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  være en ordnet basis for  $V_1$  og  $\gamma = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$  en ordnet basis for  $V_2$ . Så gælder der, at

$$\{\mathbf{v} \in V_1 \mid L(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\} = \{c_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + c_n \cdot \mathbf{v}_n \mid \mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n) \text{ opfylder } {}_\gamma[L]_\beta \cdot \mathbf{c} = [\mathbf{w}]_\gamma\}.$$

Særligt er

$$\ker L = \{c_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + c_n \cdot \mathbf{v}_n \mid (c_1, \dots, c_n) \in \ker {}_\gamma[L]_\beta\}.$$

*Bevis.* Anvendes Lemma 10.3.1 på vektorrummet  $V_1$  med den givne ordnede basis  $\beta$ , ser vi, at de lineære afbildninger  $\phi_\beta : V_1 \rightarrow \mathbb{F}^n$  defineret ved  $\mathbf{v} \mapsto [\mathbf{v}]_\beta$  og  $\psi_\beta : \mathbb{F}^n \rightarrow V_1$  defineret ved  $(c_1, \dots, c_n) \mapsto c_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + c_n \cdot \mathbf{v}_n$  er hinandens inverse.

Antag, at  $L(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ . Da er  $[L(\mathbf{v})]_\gamma = [\mathbf{w}]_\gamma$ , hvilket ved hjælp af det første punkt i Sætning 10.3.4 medfører, at  ${}_\gamma[L]_\beta[\mathbf{v}]_\beta = [\mathbf{w}]_\gamma$ . Hvis vi skriver  $(c_1, \dots, c_n) = [\mathbf{v}]_\beta$ , så er  $\mathbf{v} = c_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + c_n \cdot \mathbf{v}_n$ . Dette viser, at

$$\{\mathbf{v} \in V_1 \mid L(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\} \subseteq \{c_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + c_n \cdot \mathbf{v}_n \mid \mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n) \text{ opfylder } {}_\gamma[L]_\beta \cdot \mathbf{c} = [\mathbf{w}]_\gamma\}.$$

Antag omvendt, at  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{F}^n$  opfylder  ${}_\gamma[L]_\beta \cdot \mathbf{c} = [\mathbf{w}]_\gamma$ . Vektoren  $\mathbf{v} = c_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + c_n \cdot \mathbf{v}_n$  har egenskaben, at  $[\mathbf{v}]_\beta = \mathbf{c}$ . Derfor er  ${}_\gamma[L]_\beta \cdot [\mathbf{v}]_\beta = [\mathbf{w}]_\gamma$ . Ved at benytte Sætning 10.3.4 igen, ser vi, at  $[L(\mathbf{v})]_\gamma = [\mathbf{w}]_\gamma$ . Men så er  $L(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ . Dette viser, at

$$\{\mathbf{v} \in V_1 \mid L(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\} \supseteq \{c_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + c_n \cdot \mathbf{v}_n \mid \mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n) \text{ opfylder } {}_\gamma[L]_\beta \cdot \mathbf{c} = [\mathbf{w}]_\gamma\}.$$

Ved at kombinere ovenstående to resultater følger den første del af sætningen.

Ved at vælge  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$  følger udsagnet om  $\ker L$ . □

Pointen med denne sætning er, at det for at bestemme alle løsninger til ligningen  $L(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$  er nok at bestemme alle løsninger til ligningen  ${}_\gamma[L]_\beta \cdot \mathbf{c} = [\mathbf{w}]_\gamma$ . Sidstnævnte ligning er et system af lineære ligninger med totalmatrix  ${}_\gamma[L]_\beta$ , som vi kan løse ved hjælp af teknikkerne fra Kapitel 6. Det faktum, at kernen af en lineær afbildning kan bestemmes ved hjælp af matrixrepræsentationen af den pågældende afbildning, har følgende pæne konsekvens, der kendes som *dimensionssætningen for lineære afbildninger*. Bemærk, at dette begreb på engelsk kaldes *the rank-nullity theorem for linear maps*.

### Korollar 10.4.3

Lad  $\mathbb{F}$  være et legeme og  $L : V_1 \rightarrow V_2$  en lineær afbildning mellem endeligdimensionelle vektorrum over  $\mathbb{F}$ . Da gælder der, at

$$\dim(\ker L) + \dim(\text{image} L) = \dim V_1.$$

*Bevis.* Hvis  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d\}$  er en basis for  $\ker L$ , så er  $\{[\mathbf{v}_1]_\beta, \dots, [\mathbf{v}_d]_\beta\}$  en basis for  $\ker \gamma[L]_\beta$  jævnfør Sætning 9.2.3. Derfor er  $\dim \ker L = \dim \ker \gamma[L]_\beta$ . Derudover er  $\dim \operatorname{image} L = \dim \operatorname{image} \gamma[L]_\beta$  jævnfør Korollar 9.3.5. Dermed følger resultatet fra dimensionssætningen for matricer (se Sætning 10.1.3).  $\square$

### Eksempel 10.4.1

Dette eksempel er en variation af Eksempel 10.2.9. I det eksempel betragtede vi afbildningen  $ev : \mathbb{C}[Z] \rightarrow \mathbb{C}^2$  defineret ved  $p(Z) \mapsto (p(0), p(1))$  og bestemte dens kerne. Lad nu  $V_1 \subseteq \mathbb{C}[Z]$  være underrummet af  $\mathbb{C}[Z]$  bestående af alle polynomier af grad højst tre. Så er  $\beta = (1, Z, Z^2, Z^3)$  en ordnet basis for  $V_1$ . For  $\mathbb{C}^2$  vælger vi den ordnede standardbasis  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ . Lad os nu betragte den lineære afbildning  $L : V_1 \rightarrow \mathbb{C}^2$  defineret ved  $L(p(Z)) = (p(0), p(1))$ . Med andre ord: vi afgrænser definitionsområdet for  $ev$  til  $V_1$  men ændrer ellers ikke noget.

**Spørgsmål:** Hvad er kernen af den lineære afbildning  $L$  beskrevet ovenfor? Hvad er alle løsninger til ligningen  $L(p(Z)) = (5, 8)$ ?

**Svar:**

Vi kan bestemme  $\ker L$  på flere måder, men lad os her benytte Sætning 10.4.2. For at bestemme  $\ker L$  bestemmer vi først kernen af  $\gamma[L]_\beta$ . Vi har  $L(1) = (1, 1) = 1 \cdot \mathbf{e}_1 + 1 \cdot \mathbf{e}_2$ ,  $L(Z) = (0, 1) = 1 \cdot \mathbf{e}_2$ ,  $L(Z^2) = (0, 1) = 1 \cdot \mathbf{e}_2$  og  $L(Z^3) = (0, 1) = 1 \cdot \mathbf{e}_2$ . Derfor er

$$\gamma[L]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Den reducerede trappeform af denne matrix kan i dette tilfælde hurtigt bestemmes ved, at den første række trækkes fra den anden række. Vi opnår matricen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Fra dette resultat får vi ved hjælp af Sætning 6.4.4 og Korollar 9.3.4, at en basis for  $\ker \gamma[L]_\beta$  er givet ved mængden

$$\left\{ \left[ \begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right] \right\}.$$

Dermed er en basis for  $\ker L$  givet ved mængden  $\{-Z + Z^2, -Z + Z^3\}$ , og vi har så, at

$$\ker L = \{t_1 \cdot (-Z + Z^2) + t_2 \cdot (-Z + Z^3) \mid t_1, t_2 \in \mathbb{C}\}.$$

Vi besvarer det afsluttende spørgsmål om løsningerne til ligningen  $L(p(Z)) = (5, 8)$  ved at benytte Sætning 10.4.1. Det eneste, vi mangler, er en partikulær løsning. Vi kan igen

omdanne ligningen til et system af lineære ligninger, hvilket giver anledning til et system af inhomogene lineære ligninger med totalmatrix

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \end{array} \right]'$$

som har reduceret trappeform

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right].$$

En partikulær løsning  $(c_1, c_2, c_3, c_4)$  skal opfylde  $c_1 = 5$  og  $c_2 + c_3 + c_4 = 3$ . Derfor er  $(5, 3, 0, 0)$  en partikulær løsning, som svarer til polynomiet  $f(Z) = 5 + 3Z$ . Ved hjælp af Sætning 10.4.1 konkluderer vi, at alle løsninger til ligningen  $L(p(Z)) = (5, 8)$  udgør mængden

$$\{5 + 3Z + t_1 \cdot (-Z + Z^2) + t_2 \cdot (-Z + Z^3) \mid t_1, t_2 \in \mathbb{C}\}.$$

En lille sidebemærkning: en anden måde at bestemme  $\ker L$  på er at udnytte, at vi allerede har bestemt kernen af  $\text{ev} : \mathbb{C}[Z] \rightarrow \mathbb{C}^2$  i Eksempel 10.2.9. Da har vi nemlig, at

$$\begin{aligned} \ker L &= \ker \text{ev} \cap V_1 \\ &= \{Z \cdot (Z - 1) \cdot s(Z) \mid s(Z) \in \mathbb{C}[Z]\} \cap V_1 \\ &= \{Z \cdot (Z - 1) \cdot s(Z) \mid s(Z) \in \mathbb{C}[Z], \deg s(Z) \leq 1\}. \end{aligned}$$

Her benyttede vi, at  $Z \cdot (Z - 1) \cdot s(Z) \in V_1$  gælder, hvis  $\deg(Z \cdot (Z - 1) \cdot s(Z)) \leq 3$ . Da  $\deg(Z \cdot (Z - 1) \cdot s(Z)) = 1 + 1 + \deg s(Z)$ , ser vi, at  $Z \cdot (Z - 1) \cdot s(Z) \in V_1$ , når  $\deg s(Z) \leq 1$ . Vi lader det være op til læseren at kontrollere, at denne måde at bestemme  $\ker L$  på giver samme resultat som før.

