Kapitel 9

Vektorrum

9.1 Definition af og eksempler på vektorrum

I de foregående kapitler har vi arbejdet med linearkombinationer af vektorer fra $\mathbb{F}^n$, hvor $\mathbb{F}$ er et tallegeme (typisk $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, eller $\mathbb{F} = \mathbb{C}$). Vi har set, at elementer i $\mathbb{F}^n$ kan lægges sammen og ganges med skalarer, dvs. ganges med elementer fra $\mathbb{F}$. Det viser sig at være en stor fordel at tage et mere abstrakt synspunkt og beskrive nogle væsentlige egenskaber helt fra start af. Disse egenskaber opstilles som såkaldt aksiomer. Dette gjorde vi på tilsvarende vis, da vi definerede et legeme. Også dér blev flere egenskaber ved de reelle og komplekse tal opstillet som aksiomer for et sådant legeme. For vektorer og skalarer kan vi opstille følgende:

Definition 9.1.1

Et *vektorrum* over et legeme $\mathbb{F}$ er en mængde V af elementer kaldet *vektorer* med to operationer defineret, som opfylder otte aksiomer. Den første operation kaldes addition og betegnes ved symbolet $+$. Den tager som input to elementer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ og returnerer en vektor i V skrevet som $\mathbf{u} + \mathbf{v}$. Den anden operation kaldes skalarmultiplikation og kan betegnes ved symbolet $\cdot$. Den tager som input et element $c \in \mathbb{F}$, i denne sammenhæng typisk kaldet en *skalar*, og en vektor $\mathbf{u} \in V$ og returnerer en vektor i V skrevet som $c \cdot \mathbf{u}$. De otte aksiomer, der skal være opfyldt, er følgende:

(i) $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ for alle $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

(ii) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ for alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$

(iii) Der eksisterer en vektor $\mathbf{0} \in V$ kaldet *nulvektoren*, således at $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ for alle $\mathbf{u} \in V$

(iv) For ethvert $\mathbf{u} \in V$ eksisterer der et element $-\mathbf{u} \in V$ kaldet den additivt inverse af $\mathbf{u}$, således at $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

(v) $c \cdot (d \cdot \mathbf{u}) = (c \cdot d) \cdot \mathbf{u}$ for alle $\mathbf{u} \in V$ og alle $c, d \in \mathbb{F}$

(vi) $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$ for alle $\mathbf{u} \in V$

(vii) $c \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c \cdot \mathbf{u} + c \cdot \mathbf{v}$ for alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ og alle $c \in \mathbb{F}$

(viii) $(c + d) \cdot \mathbf{u} = c \cdot \mathbf{u} + d \cdot \mathbf{u}$ for alle $\mathbf{u} \in V$ og alle $c, d \in \mathbb{F}$

Bemærk i punkt 5 med formlen $(c \cdot d) \cdot \mathbf{u}$, at den første forekomst af symbolet $\cdot$ (altså i udregningen $c \cdot d$) angiver multiplikation i legemet $\mathbb{F}$, mens den næste $\cdot$ angiver skalarmultiplikation i vektorrummet V. Tilsvarende i punkt 8 med formlen $(c + d) \cdot \mathbf{u} = c \cdot \mathbf{u} + d \cdot \mathbf{u}$ angiver den første forekomst af symbolet $+$ addition i $\mathbb{F}$, mens den næste $+$ angiver addition i V.

Eksempel 9.1.1

Lad os betragte $V = \mathbb{F}^n$ sammen med addition og skalarmultiplikation som defineret tidligere i Ligningerne (7.1) og (7.2). Dette udgør et eksempel på et vektorrum. Vi kan verificere, at vi ganske rigtigt har at gøre med et vektorrum, ved at kontrollere, om de otte aksiomer for vektorrum fra Definition 9.1.1 er opfyldt. Bemærk, at fem af dem allerede blev nævnt i Sætning 7.1.1. Nulvektoren, som er påkrævet af det tredje aksiom, er simpelthen nulvektoren i $\mathbb{F}^n$, og den additivt inverse af en vektor som påkrævet af det fjerde aksiom gives som:

$$-\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_1 \\ \vdots \\ -v_n \end{bmatrix}.$$

Herefter mangler vi kun at vise opfyldelse af kravet i det sjette aksiom, hvilket er nemt gjort, da

$$1 \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot v_1 \\ \vdots \\ 1 \cdot v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \text{ for alle } \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^n.$$

Vi har hermed bekræftet, at $\mathbb{F}^n$ er et vektorrum over legemet $\mathbb{F}$.

Et vektorrum over legemet $\mathbb{R}$ kaldes typisk et *reelt vektorrum*. På samme måde kaldes et vektorrum over legemet $\mathbb{C}$ typisk et *komplekst vektorrum*. Vi har i de tidligere kapitler faktisk allerede mødt eksempler på vektorrum. Lad os gengive et par stykker.

Eksempel 9.1.2

Betragt mængden $\mathbb{C}$ af komplekse tal. Hvis vi sætter $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ og $n = 1$ i Eksempel 9.1.1, konkluderer vi, at vi kan opfatte $\mathbb{C}$ som et vektorrum over sig selv. Vi kan ligeledes også opfatte $\mathbb{C}$ som et vektorrum over de reelle tal $\mathbb{R}$. Som addition $+$ vælger vi blot additionsdefinitionen af komplekse tal. Da vi kan gange to komplekse tal sammen, kan vi selvfølgelig også gange et reelt tal med et komplekst tal. Dette giver os det nødvendige skalarprodukt. At alle otte aksiomer fra Definition 9.1.1 er opfyldt, kan udledes fra

Sætningerne 3.2.2 og 3.2.3.

Eksempel 9.1.3

På samme måde som i Eksempel 9.1.2 kan man betragte mængden af reelle tal $\mathbb{R}$ som et vektorrum over sig selv, men også som et vektorrum over legemet af rationale tal $\mathbb{Q}$ (se Eksemplerne 2.1.4 og 6.1.1 for en beskrivelse af legemet $\mathbb{Q}$).

Eksempel 9.1.4

Betragt mængden $\mathbb{F}^{m\times n}$ af $m \times n$-matricer med elementer i et legeme $\mathbb{F}$. Ved at vælge matrixaddition som defineret i Definition 7.2.3 samt skalarmultiplikation som defineret ved:

$$c \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \cdot a_{11} & \cdots & c \cdot a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c \cdot a_{m1} & \cdots & c \cdot a_{mn} \end{bmatrix},$$

angiver de første to punkter i Sætning 7.2.1, at de første to vektorrumsaksiomer er opfyldt. Den $m \times n$-matrix, der kun indeholder nulelementer, fungerer som nulvektor. Alle andre aksiomer kan kontrolleres på tilsvarende vis, hvilket vi overlader til læseren.

Eksempel 9.1.5

Betragt mængden $\mathbb{C}[Z]$ af polynomier i variablen Z med koefficienter i $\mathbb{C}$ som defineret i Definition 4.1.1. På denne mængde har vi som addition $+$ den sædvanlige addition af polynomier. Vi kan gange to polynomier sammen, hvorfor vi selvfølgelig også kan gange et konstant polynomium med et andet polynomium. Dette giver os et skalarprodukt på $\mathbb{C}[Z]$. Vi vil ikke gøre det her, men man kan vise, at alle otte aksiomer fra Definition 9.1.1 er opfyldt. Således er $\mathbb{C}[Z]$ et vektorrum over $\mathbb{C}$.

Eksempel 9.1.6

Betragt mængden F af alle funktioner med definitionsmængden $\mathbb{R}$ og dispositionsmængden $\mathbb{R}$. Hvis $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $r \in \mathbb{R}$ er givet, kan man definere funktionen $r \cdot f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som $(r \cdot f)(a) = r \cdot f(a)$ for alle $a \in \mathbb{R}$. Dette definerer skalarmultiplikation på F. Addition på F defineres på en tilsvarende måde: hvis $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er givet, defineres funktionen $(f + g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$ for alle $a \in \mathbb{R}$. Man kan verificere, at dette giver F strukturen af et vektorrum over $\mathbb{R}$. Som nulvektor vælger man nulfunktionen: $\mathbf{0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, der opfylder $a \mapsto 0$ for alle $a \in \mathbb{R}$.

I alle de ovenfor nævnte eksempler gælder der, at produktet af skalaren 0 med en hvilken som helst vektor er lig med nulvektoren $\mathbf{0}$. Dog siger ingen af de otte vektorrumsaksiomer, at $0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$ for alle $\mathbf{u} \in V$. Heldigvis er de otte vektorrumsaksiomer velvalgte: man kan udlede en del fra dem, for eksempel at formlen $0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$ faktisk er sand for ethvert vektorrum. Vi beviser dette samt en anden intuitiv formel i følgende lemma:

Lemma 9.1.1
Lad V være et vektorrum. Da gælder der, at

$$0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ for alle } \mathbf{u} \in V, \tag{9.1}$$

og

$$(-1) \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{u} \text{ for alle } \mathbf{u} \in V. \tag{9.2}$$

Bevis. Ved at bruge, at $0 = 0 + 0$ og vektorrumsaksiom otte, får vi, at $0 \cdot \mathbf{u} = (0+0) \cdot \mathbf{u} = 0 \cdot \mathbf{u} + 0 \cdot \mathbf{u}$. Ved at lægge $-(0 \cdot \mathbf{u})$ til på begge sider og benytte vektorrumsaksiomerne fire, et og tre, får vi

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= 0 \cdot \mathbf{u} + (-(0 \cdot \mathbf{u})) \\ &= (0 \cdot \mathbf{u} + 0 \cdot \mathbf{u}) + (-(0 \cdot \mathbf{u})) \\ &= 0 \cdot \mathbf{u} + (0 \cdot \mathbf{u} + (-(0 \cdot \mathbf{u}))) \\ &= 0 \cdot \mathbf{u} + \mathbf{0} \\ &= 0 \cdot \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Dette viser den første del. Den anden del følger tilsvarende. Da $0 = (1 + (-1))$, får vi, at $0 \cdot \mathbf{u} = (1 + (-1)) \cdot \mathbf{u} = 1 \cdot \mathbf{u} + (-1) \cdot \mathbf{u}$. Venstre side af denne ligning er lig med $\mathbf{0}$ ifølge den første del af dette lemma. Benyttes dette sammen med vektorrumsaksiom seks, har vi, at $\mathbf{0} = \mathbf{u} + (-1) \cdot \mathbf{u}$. Derfor er $(-1) \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{u}$. □

9.2 Basis for et vektorrum

Meget lig det vi gjorde i Afsnit 7.1 med vektorer i $\mathbb{F}^m$, kan man tale om en *linearkombination* af vektorer i rammerne af generelle vektorrum. Givet et vektorrum V over et legeme $\mathbb{F}$, vektorer $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ og skalarer $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$, så kaldes et udtryk af formen

$$c_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + c_n \cdot \mathbf{v}_n$$

en linearkombination af vektorerne $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$. Ligeledes generaliseres begrebet lineær (u)afhængighed af en endelig sekvens af vektorer fra Definition 7.1.1 nemt til emnet om vektorrum:

Definition 9.2.1
Lad V være et vektorrum over et legeme $\mathbb{F}$. En sekvens af vektorer $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ kaldes *lineært uafhængig*, hvis og kun hvis ligningen $c_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots c_n \cdot \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ med $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$ kun er sand for $c_1 = \cdots = c_n = 0$.

Hvis sekvensen af vektorer $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ ikke er lineært uafhængig, siges den at være *lineært afhængig*.

Grundlæggende er den eneste forskel fra Definition 7.1.1, at $\mathbb{F}^m$ her er blevet erstattet med V. Også i rammerne af generelle vektorrum er det almindeligt blot at sige, at vektorerne $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ er lineært (u)afhængige snarere end at sige, at sekvensen af vektorer $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ er lineært (u)afhængig.

Der opstår dog én komplikation vedrørende lineær uafhængighed af vektorer i generelle vektorrum. I Definition 9.2.1 betragtede vi kun *endeligt mange* vektorer. Det viser sig, at vi nogle gange gerne vil kunne sige, at vektorerne fra en muligvis uendelig mængde er lineært uafhængige. Følgende definition vil tillade os at gøre dette.

Definition 9.2.2

Lad V være et vektorrum over et legeme $\mathbb{F}$. Vektorerne i en mængde S af vektorer kaldes *lineært uafhængige*, hvis og kun hvis enhver endelig sekvens af forskellige vektorer $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ fra S er en lineært uafhængig sekvens af vektorer.

Hvis vektorerne i S ikke er lineært uafhængige, siges de at være *lineært afhængige*.

Grundlæggende siger Definition 9.2.2, at selvom antallet af vektorer i en mængde S kan være uendeligt, så betragter vi kun endeligt mange af dem ad gangen, når vi vil afgøre, om de er lineært uafhængige. Ofte vil vi kun arbejde med endelige sekvenser af vektorer, hvor Definition 9.2.1 kan anvendes.

I Eksemplerne 7.1.2 og 7.1.3 har vi allerede givet eksempler på lineært afhængige og lineært uafhængige vektorer i vektorrummet $\mathbb{R}^2$. Lad os se på nogle flere eksempler.

Eksempel 9.2.1

I Eksempel 9.1.2 opfattede vi $\mathbb{C}$ som et vektorrum over $\mathbb{R}$. I dette eksempel ser vi nærmere på lineært afhængige og uafhængige elementer herfra. Lad os som det første betragte elementerne 1 og i. For at afgøre om disse er lineært uafhængige, betragter vi ligningen $c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot i = 0$, hvor $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Vi tillader kun, at c_1 og c_2 kan antage reelle værdier, da vi i dette eksempel opfatter $\mathbb{C}$ som et vektorrum over legemet $\mathbb{R}$. Derfor har vi i Definition 9.2.1 $V = \mathbb{C}$ og $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, hvorfor skalarerne skal komme fra $\mathbb{R}$.

Fortsætter vi med ligningen $c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot i = 0$, hvor $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, ser vi, at det komplekse tal $c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot i$ er på rektangulær form. Da to komplekse tal er ens, hvis og kun hvis de har samme realdel og imaginærdel, medfører ligningen $c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot i = 0$, at $c_1 = 0$, og $c_2 = 0$. Vi konkluderer, at de komplekse tal 1 og i er lineært uafhængige over $\mathbb{R}$.

På samme måde kan man vise, at de komplekse tal 2 og $1 + i$ er lineært uafhængige. Vi betragter her ligningen $c_1 \cdot 2 + c_2 \cdot (1 + i) = 0$ for $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Sammenligninger vi realdelene og imaginærdelene som før, medfører dette, at $2c_1 + c_2 = 0$, og $c_2 = 0$, hvoraf det følger, at $c_1 = c_2 = 0$.

Lad os som et sidste eksempel betragte en sekvens af tre komplekse tal, for eksempel 2, $1 + i$ og $2 + 3i$. Da $-(1/2) \cdot 2 + 3 \cdot (1 + i) + (-1) \cdot (2 + 3i) = 0$, ser vi, at de tre komplekse tal $2, 1 + i$ og $2 + 3i$ er lineært afhængige over $\mathbb{R}$.

Eksempel 9.2.2

I Eksempel 9.1.4 opfattede vi mængden af matricer $\mathbb{F}^{m\times n}$ som et vektorrum over $\mathbb{F}$. For ethvert talpar (i,j), der opfylder $1 \le i \le m$ og $1 \le j \le n$, definerer vi matricen $\mathbf{E}^{(i,j)} \in \mathbb{F}^{m\times n}$ som den matrix, der har nulelementer overalt undtagen på position (i,j), hvor den har et ettal. For eksempel har vi med $m = n = 2$ følgende:

$$\mathbf{E}^{(1,1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{E}^{(1,2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{E}^{(2,1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{E}^{(2,2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Med $m = n = 2$ har vi, at matricerne $\mathbf{E}^{(1,1)}, \mathbf{E}^{(1,2)}, \mathbf{E}^{(2,1)}, \mathbf{E}^{(2,2)}$ er lineært uafhængige over $\mathbb{F}$. Der gælder nemlig for alle $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{F}$, at

$$c_1 \cdot \mathbf{E}^{(1,1)} + c_2 \cdot \mathbf{E}^{(1,2)} + c_3 \cdot \mathbf{E}^{(2,1)} + c_4 \cdot \mathbf{E}^{(2,2)} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}.$$

Derfor medfører $c_1 \cdot \mathbf{E}^{(1,1)} + c_2 \cdot \mathbf{E}^{(1,2)} + c_3 \cdot \mathbf{E}^{(2,1)} + c_4 \cdot \mathbf{E}^{(2,2)} = \mathbf{0}$, at $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$.

For generelle værdier af m og n kan man tilsvarende vise, at $m \times n$-matricerne $\mathbf{E}^{(1,1)}, \ldots, \mathbf{E}^{(m,n)}$ er lineært uafhængige over $\mathbb{F}$.

For $m = n = 2$ er et eksempel på en sekvens af lineært afhængige matricer følgende:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ og } \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

da

$$1 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Eksempel 9.2.3

Betragt det komplekse vektorrum $\mathbb{C}[Z]$ fra Eksempel 9.1.5. Husk på, at to polynomier, $p_1(Z) = a_0 + a_1 Z + \cdots + a_n Z^n$ af grad n og $p_2(Z) = b_0 + b_1 Z + \cdots + b_m Z^m$ af grad m, er ens, hvis og kun hvis $n = m$, og $a_i = b_i$ for alle i. Dette medfører særligt, at et polynomium $p(Z) = c_0 + c_1 Z + \cdots + c_n Z^n$ er lig med nulpolynomiet, hvis og kun hvis $c_i = 0$ for alle i. Dette viser, at mængden $\{1, Z, Z^2, \ldots\}$ er en mængde af lineært uafhængige polynomier over $\mathbb{C}$.

Alle disse eksempler viser, at begrebet lineær uafhængighed overføres fint til den generelle ramme af vektorrum. Med dette på plads er vi nået til et særdeles vigtigt begreb i teorien om vektorrum.

Definition 9.2.3

Lad V være et vektorrum over et legeme $\mathbb{F}$. En mængde S af vektorer i V kaldes en *basis* for V, hvis følgende to betingelser er opfyldt:

(i) Vektorerne i S er lineært uafhængige.

(ii) Enhver $\mathbf{v} \in V$ kan skrives som en linearkombination af vektorerne i S.

En *ordnet basis* $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots)$ for V er en liste af vektorer i V, således at mængden $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots\}$ udgør en basis for V.

Det viser sig, at ethvert vektorrum har en basis, og vi vil frit anvende dette faktum. En læser, der har tid og lyst til lidt ekstra materiale om dette, henvises til Afsnit 9.4, men dette er ikke obligatorisk læsning. Hvis et vektorrum har en endelig basis, det vil sige, hvis mængden S, der indeholder basisvektorerne, er endelig, kan vi nummerere elementerne i S og skrive $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$. Da er $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ en endelig, ordnet basis for V. Derfor har ethvert vektorrum med en endelig basis en ordnet basis.

Før vi ser på eksempler, opstiller vi her et lemma samt endnu en definition.

Lemma 9.2.1

Lad V være et vektorrum over et legeme $\mathbb{F}$, der har en endelig, ordnet basis $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$. Da kan enhver vektor $\mathbf{v} \in V$ på præcis én måde skrives som en linearkombination af basisvektorerne.

Bevis. Det andet punkt i Definition 9.2.3 garanterer, at enhver vektor $\mathbf{v} \in V$ kan skrives som en linearkombination af basisvektorerne, altså $\mathbf{v} = c_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots c_n \cdot \mathbf{v}_n$ for visse $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}$. Hvad vi skal vise, er, at dette er den eneste måde, hvorpå man kan skrive $\mathbf{v}$ som en linearkombination af basisvektorerne $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$. Antag derfor, at $\mathbf{v} = d_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots d_n \cdot \mathbf{v}_n$ for visse $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{F}$. Vi ønsker at vise, at $c_1 = d_1, \dots, c_n = d_n$. Først og fremmest har vi

$$c_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots c_n \cdot \mathbf{v}_n = \mathbf{v} = d_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots d_n \cdot \mathbf{v}_n.$$

Derfor er

$$c_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots c_n \cdot \mathbf{v}_n - (d_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots d_n \cdot \mathbf{v}_n) = \mathbf{0},$$

hvilket igen medfører, at

$$(c_1 - d_1) \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots (c_n - d_n) \cdot \mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

Men da vektorerne $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ er lineært uafhængige (dette følger af første del af Definition 9.2.3), ser vi, at $c_1 - d_1 = 0, \dots, c_n - d_n = 0$. Men så er $c_1 = d_1, \dots, c_n = d_n$, hvilket var det, vi ønskede at vise. □

Lemma 9.2.1 motiverer for følgende definition:

Definition 9.2.4

Lad V være et vektorrum over et legeme $\mathbb{F}$, der har en endelig, ordnet basis $\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$. Hvis vi for $\mathbf{v} \in V$ har

$$\mathbf{v} = c_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots c_n \cdot \mathbf{v}_n,$$

så definerer vi

$$[\mathbf{v}]_\beta = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^n$$

som *koordinatvektoren* for $\mathbf{v}$ med hensyn til den ordnede basis β. Man siger også, at $[\mathbf{v}]_\beta$ er *β-koordinatvektoren* for $\mathbf{v}$.

Funktionen, der sender en vektor fra V til dens β-koordinatvektor, har flere gode egenskaber. Særligt vil de følgende to vise sig nyttige senere hen.

Lemma 9.2.2

Lad V være et vektorrum over et legeme $\mathbb{F}$, der har en endelig, ordnet basis β. Da gælder der, at:

$$[\mathbf{u}+\mathbf{v}]_\beta = [\mathbf{u}]_\beta + [\mathbf{v}]_\beta \text{ for alle } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$$

og

$$[c \cdot \mathbf{v}]_\beta = c \cdot [\mathbf{v}]_\beta \text{ for alle } c \in \mathbb{F} \text{ og } \mathbf{v} \in V.$$

Bevis. Vi beviser kun den første del og overlader beviset for den anden del til læseren. Lad os sige, at den ordnede basis β er givet ved $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$. Hvis $\mathbf{u} = c_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots c_n \cdot \mathbf{v}_n$, og $\mathbf{v} = d_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots d_n \cdot \mathbf{v}_n$, så er $\mathbf{u}+\mathbf{v} = (c_1+d_1)\cdot \mathbf{v}_1 + \cdots (c_n+d_n)\cdot \mathbf{v}_n$. Derfor har vi, at

$$[\mathbf{u}+\mathbf{v}]_\beta = \begin{bmatrix} c_1+d_1 \\ \vdots \\ c_n+d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} = [\mathbf{u}]_\beta + [\mathbf{v}]_\beta.$$

□

Nu vil vi benytte dette lemma til at bevise et sætning om lineær uafhængighed af vektorer.

Sætning 9.2.3

Lad V være et vektorrum over et legeme $\mathbb{F}$, der har en endelig, ordnet basis β bestående af n vektorer. Antag, at vi har $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_\ell \in V$ og $c_1, \ldots, c_\ell \in \mathbb{F}$. Da gælder der, at:

$$c_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \cdots + c_\ell \cdot \mathbf{u}_\ell = \mathbf{0}, \text{ hvis og kun hvis } c_1 \cdot [\mathbf{u}_1]_\beta + \cdots + c_\ell \cdot [\mathbf{u}_\ell]_\beta = \mathbf{0}.$$

Særligt er vektorerne $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_\ell$ i V lineært uafhængige, hvis og kun hvis vektorerne $[\mathbf{u}_1]_\beta, \ldots, [\mathbf{u}_\ell]_\beta$ i $\mathbb{F}^n$ er lineært uafhængige.

Bevis. En vektor $\mathbf{v}$ i V er nulvektoren, hvis og kun hvis dens β-koordinatvektor er nulvektoren. Derfor gælder $c_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \cdots + c_\ell \cdot \mathbf{u}_\ell = \mathbf{0}$, hvis og kun hvis $[c_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \cdots + c_\ell \cdot \mathbf{u}_\ell]_\beta = \mathbf{0}$. Ved at anvende Lemma 9.2.2 gentagne gange kan vi også udlede, at $[c_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \cdots + c_\ell \cdot \mathbf{u}_\ell]_\beta =$

$c_1 \cdot [\mathbf{u}_1]_\beta + \cdots + c_\ell \cdot [\mathbf{u}_\ell]_\beta$. Dermed følger den første del af sætningen. Den anden del følger direkte fra den første del. □

Denne sætning reducerer essentielt set spørgsmålet om lineær (u)afhængighed af vektorer i V til et spørgsmål om lineær (u)afhængighed af vektorer i $\mathbb{F}^n$. Til arbejde med $\mathbb{F}^n$ har vi allerede teknikker til rådighed, især Sætning 7.1.3.

Eksempel 9.2.4

Lad $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ og $V = \mathbb{R}^2$. Vi påstår, at vektorerne

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

udgør en ordnet basis β for $\mathbb{R}^2$. Disse vektorer er lineært uafhængige (læseren opfordres til at kontrollere dette), og enhver vektor i $\mathbb{R}^2$ kan skrives som en linearkombination af $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$, da

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = v_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Det betyder, at vi i dette tilfælde har $[\mathbf{v}]_\beta = \mathbf{v}$.

Lad nu γ være sekvensen af vektorerne

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Vi har set i Eksempel 7.1.3, at disse to vektorer er lineært uafhængige. Desuden kan man vise, at enhver vektor i $\mathbb{R}^2$ kan skrives som en linearkombination af $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$. Givet $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ fører ligningen

$$c_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

til et system af to lineære ligninger i variablerne c_1 og c_2. Ved at løse dette system kan man vise, at vi for enhver $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$, har

$$c_1 = -\frac{v_1}{3} + \frac{2v_2}{3} \quad \text{og} \quad c_2 = \frac{2v_1}{3} - \frac{v_2}{3},$$

således at

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \left(-\frac{v_1}{3} + \frac{2v_2}{3}\right) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \left(\frac{2v_1}{3} - \frac{v_2}{3}\right) \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dette betyder, at $\gamma = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ er en ordnet basis for $\mathbb{R}^2$. Desuden ser vi fra ovenstående, at

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}_\gamma = \begin{bmatrix} -v_1/3 + 2v_2/3 \\ 2v_1/3 - v_2/3 \end{bmatrix}.$$

Den første del af Eksempel 9.2.4 kan udvides yderligere: lad os som i Afsnit 7.3 betegne den i'te søjle i identitetsmatricen $\mathbf{I}_n \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ved $\mathbf{e}_i$ for $i = 1, \ldots, n$. Med andre ord: vektoren $\mathbf{e}_i$ har 1 som sin i'te koordinat og nul alle andre steder. Disse vektorer udgør en ordnet basis $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ for vektorrummet $\mathbb{F}^n$, kaldet en *(ordnet) standardbasis*. Lad os for fuldstændighedens skyld vise, at de udgør en ordnet basis:

Proposition 9.2.4

Vektorerne $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ udgør en ordnet basis for vektorrummet $\mathbb{F}^n$ over $\mathbb{F}$.

Bevis. Ifølge Definition 9.2.3 skal vi kontrollere to ting:

(i) Vektorerne $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ er lineært uafhængige.

(ii) Enhver vektor i $\mathbb{F}^n$ kan skrives som en linearkombination af $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$.

Det første punkt følger fra observationen af, at

$$c_1 \cdot \mathbf{e}_1 + c_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \cdots + c_n \cdot \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Dette betyder, at hvis en linearkombination er lig med nulvektoren i $\mathbb{F}^n$, så er alle skalarer $c_1, \ldots, c_n$ nul. Det andet punkt følger, da vi, hvis $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{F}^n$ er givet, har

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = v_1 \cdot \mathbf{e}_1 + v_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \cdots + v_n \cdot \mathbf{e}_n.$$

□

På samme måde som i Eksempel 9.2.4 gælder der, at hvis β er den ordnede standardbasis for $\mathbb{F}^n$, så er $[\mathbf{v}]_\beta = \mathbf{v}$ for alle $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$. Bemærk dog, at ligesom i Eksempel 9.2.4 har vektorrummet $\mathbb{F}^n$ mange andre mulige ordnede baser. Lad os fortsætte med nogle eksempler på baser for vektorrum.

Eksempel 9.2.5

Vi fortsætter fra Eksemplerne 9.1.2 og 9.2.1, hvorfra vi ved, at de komplekse tal 1 og i er lineært uafhængige over $\mathbb{R}$. De udgør faktisk en ordnet basis $(1, i)$, som vi betegner ved β, da ethvert komplekst tal er en linearkombination af 1 og i over de reelle tal. Mere specifikt har vi for ethvert $a, b \in \mathbb{R}$, at $a + bi = a \cdot 1 + b \cdot i$. Derfor har vi for $a, b \in \mathbb{R}$, at

$$[a+bi]_\beta = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Dermed er $[a+bi]_\beta$ lig med de rektangulære koordinater for det komplekse tal $a + bi$.

Der er mange flere mulige baser (og dermed ordnede baser) for $\mathbb{C}$, når den betragtes som et vektorrum over $\mathbb{R}$. For eksempel er $(2, 1+i)$ en mulig ordnet basis. Vi har nemlig allerede vist i Eksempel 9.2.1, at de komplekse tal 2 og $1+i$ er lineært uafhængige over $\mathbb{R}$. Derfor kan ethvert komplekst tal skrives som en linearkombination med koefficienter i $\mathbb{R}$ af 2 og $1+i$. For at indse dette kan vi verificere, at ligningen $a + bi = c_1 \cdot 2 + c_2 \cdot (1+i)$ for et givet komplekst tal $a + bi$, hvor $a, b \in \mathbb{R}$, har en løsning $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. En sammenligning af realdelene og imaginærdelene viser, at $a = 2c_1 + c_2$, og $b = c_2$. Derfor har vi som løsning $c_2 = b$ og $c_1 = (a - c_2)/2 = (a-b)/2$. Betegnes den ordnede basis $(2, 1+i)$ ved γ, har vi

$$[a+bi]_\gamma = \begin{bmatrix} (a-b)/2 \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Eksempel 9.2.6

Vi fortsætter her fra Eksemplerne 9.1.4 og 9.2.2 og finder en ordnet basis β for vektorrummet $\mathbb{F}^{m \times n}$ over $\mathbb{F}$. En sådan ordnet basis er $(\mathbf{E}^{(1,1)}, \ldots, \mathbf{E}^{(m,n)})$. Vi har allerede set, at matricerne $\mathbf{E}^{(1,1)}, \ldots, \mathbf{E}^{(m,n)}$ er lineært uafhængige, og at enhver matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \le i \le m; 1 \le j \le n}$ kan skrives som en linearkombination af dem, nemlig som $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mathbf{E}^{(i,j)}$.

Specifikt for $m = n = 2$ udgør matricerne $\mathbf{E}^{(1,1)}, \mathbf{E}^{(1,2)}, \mathbf{E}^{(2,1)}, \mathbf{E}^{(2,2)}$ en ordnet basis $\beta = (\mathbf{E}^{(1,1)}, \mathbf{E}^{(1,2)}, \mathbf{E}^{(2,1)}, \mathbf{E}^{(2,2)})$, og vi har

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_\beta = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix}.$$

Eksempel 9.2.7

I dette eksempel ser vi igen på det komplekse vektorrum $\mathbb{C}[Z]$ fra Eksemplerne 9.1.5 og 9.2.3. Fra disse eksempler ved vi allerede, at mængden $\{1, Z, Z^2, \ldots\}$ er en mængde af lineært uafhængige polynomer over $\mathbb{C}$. Ifølge definitionen af polynomer er ethvert polynomium en linearkombination over $\mathbb{C}$ af et endeligt antal elementer fra denne mængde. Derfor er mængden $\{1, Z, Z^2, \ldots\}$ faktisk en basis for det komplekse vektorrum $\mathbb{C}[Z]$. Dette er et eksempel på et vektorrum, der har en uendelig basis.

Det viser sig, at antallet af vektorer i en basis for et givet vektorrum V over et legeme $\mathbb{F}$ altid er det samme. Senere i dette afsnit vil vi bevise dette i særtilfældet, hvor antallet af vektorer i en basis er endeligt. Generelt kaldes antallet af elementer i en basis for V for *dimensionen* af vektorrummet V. Almindelig notation for dimensionen af et vektorrum V er: $\dim(V)$ eller blot dim V. Hvis man ønsker at præcisere, over hvilket legeme $\mathbb{F}$ vektorrummet er defineret, skriver man $\dim_{\mathbb{F}}(V)$ eller $\dim_{\mathbb{F}} V$. Hvis antallet af vektorer i en basis er endeligt, siges V at have en endelig dimension, og ellers siges V at have en uendelig dimension, hvilket også kan udtrykkes som: $\dim V = \infty$.

Eksempel 9.2.8

Lad os udregne dimensionerne af forskellige eksempler på vektorrum, som vi har mødt indtil nu. Først og fremmest fra Eksempel 9.2.4 ser vi, at $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2) = 2$. Mere generelt har man $\dim_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^n) = n$, da en basis for $\mathbb{F}^n$ kan dannes af de n vektorer $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$.

Et særtilfælde af ovenstående er, når $\mathbb{C}$ betragtes som et vektorrum over sig selv. Da har det dimension én: $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$ (en mulig basis kan dannes af det komplekse tal 1). Men hvis $\mathbb{C}$ betragtes som et vektorrum over $\mathbb{R}$, er en basis givet ved $\{1, i\}$, som vi har set i Eksempel 9.2.5. Derfor er $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$.

Vektorrummet af $m \times n$-matricer $\mathbb{F}^{m\times n}$ har en basis bestående af de mn matricer $\mathbf{E}^{(i,j)}$ for $1 \le i \le m$ og $1 \le j \le n$, som vi har set i Eksempel 9.2.6. Derfor er $\dim_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^{m\times n}) = mn$.

Vi har set i Eksempel 9.2.3, at det komplekse vektorrum $\mathbb{C}[Z]$ har en basis med uendeligt mange elementer, nemlig $\{1, Z, Z^2, \dots\}$. Derfor er $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[Z]) = \infty$.

Sætning 9.2.5

Hvis V har en endelig basis bestående af n vektorer, har enhver anden mængde af lineært uafhængige vektorer i V højst n elementer.

Bevis. Lad os betegne basisvektorerne ved $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ og den resulterende ordnede basis ved β. Vi vil bevise sætningen med et modstridsbevis. Antag derfor, at der findes en mængde med mindst $n+1$ lineært uafhængige vektorer, som vi kalder $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n+1}$. Da β er en ordnet basis, findes der skalarer $a_{ij} \in \mathbb{F}$, således at

$$\mathbf{w}_j = a_{1j}\mathbf{v}_1 + \cdots + a_{nj}\mathbf{v}_n \text{ for } j = 1, \dots, n+1.$$

Lad nu $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{F}^{n\times(n+1)}$ være matricen med elementer a_{ij}. Bemærk, at den j'te søjle i $\mathbf{A}$ er lig med $[\mathbf{w}_j]_\beta$. Da $\mathbf{A}$ har n rækker, er dens rang $\rho(\mathbf{A})$ højst n. Da $\mathbf{A}$ har $n+1$ søjler, betyder dette, at $\rho(\mathbf{A}) < n+1$. Således ser vi ifølge Korollar 6.4.5, at det homogene system med koefficientmatrix $\mathbf{A}$ har løsninger, der ikke er nulløsningen. Lad $(c_1, \dots, c_{n+1}) \in \mathbb{F}^{n+1}$ være en sådan løsning forskellig fra nulløsningen. Da har vi

$$c_1 \cdot \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + \cdots + c_{n+1} \cdot \begin{bmatrix} a_{1\,n+1} \\ \vdots \\ a_{n\,n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Husk nu, at den j'te søjle i $\mathbf{A}$ er lig med $[\mathbf{w}_j]_\beta$. Dette betyder, at vi har $c_1 \cdot [\mathbf{w}_1]_\beta + c_{n+1} \cdot [\mathbf{w}_{n+1}]_\beta = \mathbf{0}$. Da det følger fra Lemma 9.2.2, at $[c_1 \cdot \mathbf{w}_1 + \cdots + c_{n+1} \cdot \mathbf{w}_{n+1}]_\beta = c_1 \cdot [\mathbf{w}_1]_\beta + c_{n+1} \cdot [\mathbf{w}_{n+1}]_\beta$, kan vi konkludere, at $[c_1 \cdot \mathbf{w}_1 + \cdots + c_{n+1} \cdot \mathbf{w}_{n+1}]_\beta = \mathbf{0}$. Derfor er $c_1 \cdot \mathbf{w}_1 + \cdots + c_{n+1} \cdot \mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{0}$. Da $(c_1, \dots, c_{n+1})$ ikke var nulvektoren, konkluderer vi, at vektorerne $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{n+1}$ ikke er lineært uafhængige alligevel. Denne modstrid viser, at antagelsen om, at der findes en mængde med mindst $n+1$ lineært uafhængige vektorer, var forkert. Derfor er sætningen sand. □

Korollar 9.2.6

Hvis V har en endelig basis bestående af n vektorer, indeholder enhver anden basis for V også præcis n vektorer.

Bevis. Lad S være en basis for V bestående af n vektorer og T en hvilken som helst anden basis. Da vektorerne i T er lineært uafhængige, medfører Sætning 9.2.5, at antallet af vektorer i T højst er n. Lad os betegne ved m antallet af vektorer i T. Hvad vi lige har vist, er, at $m \leq n$. Nu anvender vi Sætning 9.2.5 igen, hvor vi denne gang antager T som basis, og vi konkluderer, at antallet af elementer i S er højst m, det vil sige: $n \leq m$. Ved at kombinere ulighederne $m \leq n$ og $n \leq m$, konkluderer vi, at $n = m$, hvilket er det, vi ønskede at vise. □

Dette korollar retfærdiggør definitionen af dimensionen af et vektorrum V som antallet af basisvektorer i endeligdimensionelle tilfælde: uanset hvilken basis for V du vælger, vil den indeholde nøjagtig samme antal vektorer. Som tidligere nævnt vil basisvektorer typisk være forskellige på tværs af forskellige baser. Faktisk kan vi for endeligdimensionelle vektorrum karakterisere alle de mulige baser således:

Sætning 9.2.7

Lad V være et vektorrum over et legeme $\mathbb{F}$ med dimension n. Da er enhver mængde af n lineært uafhængige vektorer i V en basis for V.

Bevis. Lad os betegne vektorerne i en basis for V ved $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, og lad os skrive β for den tilsvarende ordnede basis. Lad $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ være n lineært uafhængige vektorer i V. For at vise, at disse udgør en basis, skal vi kun kontrollere punkt 2 i Definition 9.2.3. Det vil sige, vi skal vise, at enhver $\mathbf{v} \in V$ kan skrives som en linearkombination af $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$. Da β er en basis, kan vi finde skalarer $a_{ij} \in \mathbb{F}$, således at

$$\mathbf{w}_j = a_{1j} \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + a_{nj} \cdot \mathbf{v}_n \text{ for } j = 1, \ldots, n,$$

eller ækvivalent ved brug af summationssymbolet:

$$\mathbf{w}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot \mathbf{v}_i \text{ for } j = 1, \ldots, n. \tag{9.3}$$

Lad nu $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{F}^{n \times n}$ være matricen med elementer a_{ij}. Bemærk ligesom i beviset af Sætning 9.2.5, at den j'te søjle i $\mathbf{A}$ er lig med $[\mathbf{w}_j]_\beta$. Vi hævder, at disse søjler er lineært uafhængige vektorer i $\mathbb{F}^n$. For at indse at dette er sandt, antager vi, at $c_1 \cdot [\mathbf{w}_1]_\beta + c_n \cdot [\mathbf{w}_n]_\beta = \mathbf{0}$ for nogle $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$. Da er $[c_1 \cdot \mathbf{w}_1 + \cdots + c_n \cdot \mathbf{w}_n]_\beta = \mathbf{0}$, hvilket medfører, at

$c_1 \cdot \mathbf{w}_1 + \cdots + c_n \cdot \mathbf{w}_n = \mathbf{0}$. Da vektorerne $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ er lineært uafhængige, konkluderer vi, at $c_1 = 0, \ldots, c_n = 0$, hvilket er det, vi ønskede at vise for at bevise vores påstand. Nu benytter vi Sætning 7.1.3 og Korollar 7.3.5 for at konkludere, at matricen $\mathbf{A}$ har en invers matrix $\mathbf{A}^{-1}$.

Lad os nu fortsætte med det, vi ønsker at vise: at $\mathbf{v} \in V$ kan skrives som en linearkombination af $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$. Da $\mathbf{v}$ er en linearkombination af basisvektorerne $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, er det tilstrækkeligt at vise, at hver af basisvektorerne selv kan skrives som en linearkombination af $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$. Lad os skrive $\mathbf{A}^{-1} = (c_{ij})_{1 \le i \le n; 1 \le j \le n}$. Vi hævder, at:

$$\mathbf{v}_j = c_{1j} \cdot \mathbf{w}_1 + \cdots + c_{nj} \cdot \mathbf{w}_n \text{ for } j = 1, \ldots, n.$$

Ækvivalent ved brug af summationssymbolet hævder vi, at:

$$\mathbf{v}_j = \sum_{k=1}^{n} c_{kj} \cdot \mathbf{w}_k \text{ for } k = 1, \ldots, n.$$

For at vise denne påstand anvender vi først Ligning (9.3) til at se, at:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} c_{kj} \cdot \mathbf{w}_k &= \sum_{k=1}^{n} c_{kj} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik} \cdot \mathbf{v}_i \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c_{kj} \cdot a_{ik} \cdot \mathbf{v}_i \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \cdot c_{kj} \cdot \mathbf{v}_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot c_{kj} \cdot \mathbf{v}_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot c_{kj} \right) \cdot \mathbf{v}_i.
\end{aligned}$$

Bemærk her, at udtrykket $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot c_{kj}$ er det (i, j)'te element i matrixproduktet $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}$. Da $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_n$, har vi $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot c_{kj} = 1$, hvis $i = j$, og ellers $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot c_{kj} = 0$. Derfor kan vi konkludere, at $\sum_{k=1}^{n} c_{kj} \cdot \mathbf{w}_k = \mathbf{v}_j$, hvilket er det, vi ønskede at vise. □

9.3 Underrum i et vektorrum

For et givet vektorrum V over et hvilket som helst legeme $\mathbb{F}$ er det muligt, at man har en delmængde W af V, som er lukket under den samme skalarmultiplikation og addition, der er defineret på V. Ordet "lukket" er blot en måde at sige på, at hvis $\mathbf{v} \in W$, og $c \in \mathbb{F}$, så er $c \cdot \mathbf{v} \in W$, og hvis $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$, så er $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$. Da V er et vektorrum, har vi altid $c \cdot \mathbf{v} \in V$ og $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$, men hvis også W er lukket under skalarmultiplikation og addition, ender vektorerne $c \cdot \mathbf{v}$ og $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ igen i W. Lad os gennemgå to eksempler på dette.

Eksempel 9.3.1

Lad os overveje det komplekse vektorrum $\mathbb{C}^2$ og delmængden $W = \{(z, 2\cdot z) \mid z \in \mathbb{C}\}$ heraf. Her vil enhver addition af to elementer fra W give et resultat, der også tilhører W, da $(z, 2\cdot z) + (w, 2\cdot w) = (z+w, 2\cdot(z+w))$ for alle $z, w \in \mathbb{C}$. Desuden giver også multiplikation af et element fra W med en skalar $c \in \mathbb{C}$ et resultat tilhørende W, da $c\cdot(z, 2\cdot z) = (c\cdot z, 2\cdot(c\cdot z))$. Faktisk er W et vektorrum ved brug af denne skalarmultiplikation og addition. For eksempel har vi $(0,0) \in W$, da $(0,0) = (0, 2\cdot 0)$. Desuden er $-(z, 2\cdot z) = ((-z), 2\cdot(-z))$ for ethvert $z \in \mathbb{C}$, hvilket viser, at hvis $\mathbf{v} \in W$, så er også $-\mathbf{v} \in W$. Læseren opfordres til at verificere de resterende vektorrumsaksiomer også. Bemærk, at $\dim_{\mathbb{C}}(W) = 1$ (en mulig basis for W er givet ved $\{(1,2)\}$).

Eksempel 9.3.2

Betragt vektorrummet $\mathbb{R}^{2\times 2}$ af 2×2-matricer med koefficienter i $\mathbb{R}$. Som vi har set tidligere, er dette et reelt vektorrum af dimension fire. Lad nu D være en delmængde af $\mathbb{R}^{2\times 2}$ bestående af alle diagonalmatricer, det vil sige:

$$D = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Denne mængde D er lukket under skalarmultiplikation og matrixaddition, hvilket betyder, at vi for $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in D$ og $c \in \mathbb{F}$ har, at $c\cdot\mathbf{A} \in D$, og at $\mathbf{A}+\mathbf{B} \in D$. Lad os kontrollere dette. Hvis $\mathbf{A}$ har diagonalelementerne λ_1 og λ_2, og $\mathbf{B}$ har diagonalelementerne μ_1 og μ_2, så er:

$$c\cdot\mathbf{A} = c\cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\cdot\lambda_1 & 0 \\ 0 & c\cdot\lambda_2 \end{bmatrix} \in D,$$

og

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1+\mu_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2+\mu_2 \end{bmatrix} \in D.$$

Man kan vise, at D faktisk er et reelt vektorrum af dimension to: en mulig ordnet basis er $(\mathbf{E}^{(1,1)}, \mathbf{E}^{(2,2)})$.

Til at samle disse typer af eksempler har vi følgende:

Definition 9.3.1

Lad V være et vektorrum over et legeme $\mathbb{F}$. Et *underrum* af V er en delmængde W af V, som er et vektorrum over $\mathbb{F}$ under samme skalarmultiplikation og vektoraddition, der er defineret på V.

Med andre ord, hvis $W \subseteq V$ er lukket under den skalarmultiplikation og vektoraddition, som V har, "nedarver" W disse operationer. Hvis W med disse operationer opfylder alle vektorrumsaksiomerne fra Definition 9.1.1, kaldes det et underrum i W. Ethvert vektorrum V har mindst to underrum: V kan opfattes som et underrum i sig selv, og der findes også altid underrummet $\{\mathbf{0}\}$, der kun indeholder nulvektoren i V. Generelt har V mange flere underrum. I alle tilfælde vil man altid kunne sige følgende om dimensionen af et underrum:

Lemma 9.3.1

Lad V være et vektorrum over et legeme $\mathbb{F}$ af dimension n og W et underrum i V. Da gælder der, at $\dim W \leq n$.

Bevis. Da V har en basis med n vektorer, og W har en basis med $\dim W$ vektorer, udgør basisvektorerne for W en sekvens af $\dim W$ lineært uafhængige vektorer. Derfor medfører Sætning 9.2.5, at $\dim W \leq n$. □

Da V allerede opfylder alle vektorrumsaksiomer, viser det sig ikke at være nødvendigt at kontrollere dem alle, når man undersøger, om en delmængde W er et underrum. Mere præcist har vi følgende lemma:

Lemma 9.3.2

Lad V være et vektorrum over $\mathbb{F}$ og W en delmængde af V, der ikke er tom. Da er W et underrum i V, hvis følgende er opfyldt:

$$\text{for alle } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W \text{ og alle } c \in \mathbb{F} \text{ gælder der, at } \mathbf{u} + c \cdot \mathbf{v} \in W. \tag{9.4}$$

Bevis. Lad os først vise, at W er lukket under skalarmultiplikation og vektoraddition i V. Da W ikke er tom, indeholder den mindst én vektor, som vi kan kalde $\mathbf{w}$. Ved at vælge $\mathbf{u} = \mathbf{w}$ og $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ i Ligning (9.4) kan vi konkludere, at vektoren $\mathbf{w} + (-1) \cdot \mathbf{w}$ også er i W. Ved for eksempel at anvende Ligning (9.2), medfører dette, at $\mathbf{0} \in W$. Nu hvor vi ved dette, kan vi anvende Ligning (9.4) igen, denne gang med $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ og $\mathbf{v} \in W$ valgt vilkårligt. Vi kan dermed konkludere, at for vilkårlige $\mathbf{v} \in W$ er også $c \cdot \mathbf{v}$ i W. Dette viser, at W er lukket under skalarmultiplikation. Ved at anvende Ligning (9.4) for vilkårlige $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ og $c = 1$, konkluderer vi, at $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ er i W. Derfor er W lukket under vektoraddition.

Lad os dernæst vise, at W er et vektorrum ved at overveje de otte vektorrumsaksiomer fra Definition 9.1.1. Da aksiomerne 1, 2, 5, 6, 7 og 8 gælder for alle vektorer i V, må de også gælde for alle vektorer i en delmængde af V. Derfor er det kun aksiomerne 3 og 4, der skal kontrolleres. Aksiom 3 er opfyldt, da vi allerede har vist, at Ligning (9.4) medfører, at $\mathbf{0} \in W$. Hvad angår aksiom 4, har vi, at hvis $\mathbf{v} \in W$, så er $(-1) \cdot \mathbf{v} \in W$, da W er lukket under skalarmultiplikation. Men ifølge Ligning (9.2) er $(-1) \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{v}$, så den additivt inverse $-\mathbf{v}$ tilhører W for alle $\mathbf{v}$ i W. □

Eksempel 9.3.3

Anvendes Lemma 9.3.2, er det ikke svært at vise, at delmængderne W og D fra Eksemplerne 9.3.1 og 9.3.2 er underrum. Læseren opfordres til at kontrollere, at betingelsen i Ligning (9.4) er opfyldt for disse eksempler.

Eksempel 9.3.4

Lad $C_\infty(\mathbb{R})$ være mængden af alle uendeligdifferentiable funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Det er uden for rammerne af denne tekst at definere helt præcist, hvad en uendeligdifferentiabel funktion er, men groft sagt betyder det følgende: hvis grænsen $\lim_{a\to 0}(f(t+a) - f(t))/a$ eksisterer for alle $t \in \mathbb{R}$, kan vi definere den afledte af f, betegnet f', som funktionen $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med $t \mapsto \lim_{a\to 0}(f(t+a) - f(t))/a$. En uendeligdifferentiabel funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ har den egenskab, at man kan blive ved med at differentiere den, så ofte man vil. Specifikt eksisterer ikke kun dens afledte f' men også den afledte af f' (betegnet f'' eller $f^{(2)}$), den afledte af f'' (betegnet f''' eller $f^{(3)}$) og så videre. Mere generelt betegnes for ethvert positivt heltal n den n'te-afledte af f ved $f^{(n)}$. Mere præcist definerer man den n'te-afledte rekursivt som følger:

$$f^{(n)} = \begin{cases} f & \text{hvis } n = 0, \\ (f^{(n-1)})' & \text{hvis } n > 0. \end{cases}$$

Mængden $C_\infty(\mathbb{R})$ er et underrum i vektorrummet F fra Eksempel 9.1.6. Dette vises ved, at man for $f, g \in C_\infty(\mathbb{R})$ og $c \in \mathbb{R}$ viser, at $f + c \cdot g \in C_\infty(\mathbb{R})$. Man kan vise induktivt, at $(f + c \cdot g)^{(n)} = f^{(n)} + c \cdot g^{(n)}$ for enhver $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, og derfor er $f + c \cdot g$ uendeligdifferentiabel, hvilket var det, vi skulle vise.

Der findes en særlig måde at konstruere et underrum på, som vi nu vil dykke ned i.

Definition 9.3.2

Lad V være et vektorrum over $\mathbb{F}$ og S en mængde af vektorer fra V. Da betegner *udspændingen* af S, betegnet $\text{Span}(S)$, mængden af alle de mulige linearkombinationer af vektorer fra S. Hvis $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, gælder der specifikt, at

$$\text{Span}(S) = \{c_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + c_n \cdot \mathbf{v}_n \mid c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{F}\}.$$

Bemærk, at begrebet udspænding på engelsk kaldes *span*, hvilket forklarer betegnelsen i definitionen. Man vil typisk definere $\text{Span}(\emptyset) = \{\mathbf{0}\}$. Som en konsekvens heraf siges den tomme mængde $\emptyset$ at udgøre en basis for vektorrummet $\{\mathbf{0}\}$. Det viser sig, at mængden $\text{Span}(S)$ for enhver delmængde $S \subseteq V$ faktisk er et underrum i V, hvilket kan vises ved anvendelse af for eksempel Lemma 9.3.2. Hvis W er et givet underrum i et vektorrum V, og $W = \text{Span}(S)$, siger man, at vektorerne i S udspænder W, eller omvendt at W er udspændt af vektorerne i S. Vektorerne i en basis for W udspænder selvfølgelig W, men generelt set er en mængde af vektorer, der udspænder W, ikke nødvendigvis lineært uafhængige.

Eksempel 9.3.5

Betragt det reelle vektorrum $V = \mathbb{R}^2$, og lad

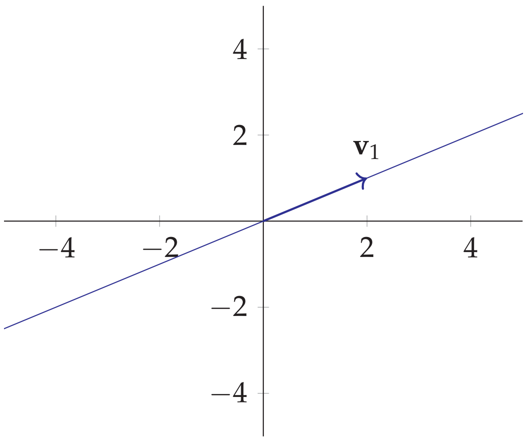
$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Lad os bestemme udspændingen af $\mathbf{v}_1$, hvilket også kan skrives som $\text{Span}(S)$, hvor $S = \{\mathbf{v}_1\}$.

Ved at anvende Definition 9.3.2 får vi:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Span}(\{\mathbf{v}_1\}) &= \{c_1 \cdot \mathbf{v}_1 \mid c_1 \in \mathbb{R}\} \\
&= \left\{ c_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \mid c_1 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} c_1 \cdot 2 \\ c_1 \cdot 1 \end{bmatrix} \mid c_1 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} 2c_1 \\ c_1 \end{bmatrix} \mid c_1 \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}$$

Grafisk set består udspændingen af $\mathbf{v}_1$ af alle vektorer, der ligger på linjen gennem $\mathbf{v}_1$ (se Figur 9.1, hvor udspændingen er angivet med en blå linje).



Figur 9.1: Udspændingen af en vektor forskellig fra nulvektoren i $\mathbb{R}^2$.

Eksempel 9.3.6

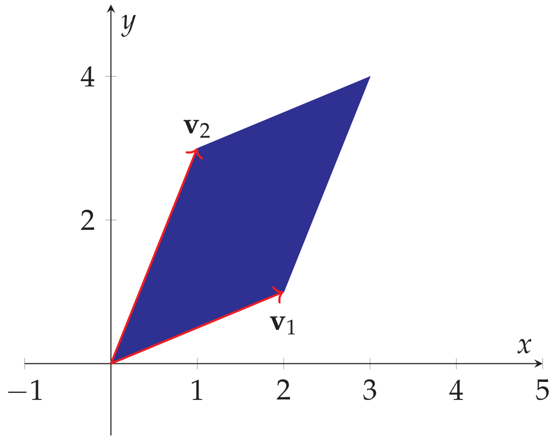
Betragt det reelle vektorrum $V = \mathbb{R}^2$, og lad

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Lad os bestemme udspændingen af vektorerne $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$, altså $\mathrm{Span}(S)$ med $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Ved at benytte Definition 9.3.2 får vi:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Span}(\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}) &= \{c_1 \cdot \mathbf{v}_1 + c_2 \cdot \mathbf{v}_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \left\{ c_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} 2c_1 + c_2 \\ c_1 + 3c_2 \end{bmatrix} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}$$

Grafisk set er situationen, at udspændingen af vektorerne $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ udgør hele rummet $\mathbb{R}^2$. I Figur 9.1 har vi farvelagt området, man opnår, når man plotter alle vektorer af formen $c_1 \cdot \mathbf{v}_1 + c_2 \cdot \mathbf{v}_2$, hvis c_1 og c_2 vælges frit i intervallet $[0, 1]$.



Figur 9.2: Området dækket af linearkombinationen $c_1 \cdot \mathbf{v}_1 + c_2 \cdot \mathbf{v}_2$ for alle $c_1, c_2 \in [0, 1]$.

Eksempel 9.3.7

Betragt det reelle vektorrum $V = \mathbb{R}^3$, og lad

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Spørgsmål: Find en basis for underrummet W udspændt af de tre vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

Svar:

Et umiddelbart, men desværre forkert, gæt kunne være, at de tre vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ selv udgør en basis. Selvfølgelig kan enhver vektor i W skrives som en linearkombination af $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$. Dette er en direkte konsekvens af Definition 9.3.2 af udspændingen. Men for at kunne udgøre en basis skal de tre vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ også være lineært uafhængige, og det viser det sig, at de ikke er. Ved hjælp af Sætning 7.1.3 kan dette undersøges ved, at vi bestemmer den reducerede trappeform af den 3×3-matrix $\mathbf{A}$, hvis søjler er $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$. Vi undlader detaljerne af denne udregning og opfordrer i stedet læseren til at verificere, at den reducerede trappeform bliver:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dette resultat viser, at de tre vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ er lineært afhængige. Samtidig viser det dog også, at de to første af vektorerne er lineært uafhængige (sammenlign med Eksempel 7.1.4, hvor en lignende tilgang blev anvendt på tre vektorer i $\mathbb{C}^3$). Vi kan konkludere, at $\mathbf{v}_3$ kan udtrykkes som en linearkombination af $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$. Dette betyder, at de to vektorer $\mathbf{v}_1$ og

$\mathbf{v}_2$ udspænder præcis det samme underum i $\mathbb{R}^3$ som de tre vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$. Derfor er $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ en basis for W.

Vi har allerede fuldt ud besvaret spørgsmålet, men nogle gange vil man gerne se udpenslet, hvordan $\mathbf{v}_3$ kan udtrykkes som en linearkombination af $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$. For at gøre dette skal vi finde en løsning på formen $(c_1, c_2, 1)$ til det homogene system af lineære ligninger, der har koefficientmatrix $\mathbf{A}$. Ved at betragte den reducerede trappeform af $\mathbf{A}$, ser vi, at $(-4, 1, 1)$ er en sådan løsning. Derfor gælder $(-4) \cdot \mathbf{v}_1 + 1 \cdot \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$, hvilket medfører, at $\mathbf{v}_3 = 4 \cdot \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$.

Geometrisk set sker der i dette eksempel dét, at vektorerne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ alle tre ligger i samme plan (nemlig i det to-dimensionelle underum W, vi fandt i eksemplet). Mere generelt kan man vise, at når tre vektorer i et reelt vektorrum $\mathbb{R}^n$ alle ligger i samme to-dimensionelle underum i $\mathbb{R}^n$, så er de lineært afhængige.

Som vi så i det tidligere eksempel, betyder det, at et underum er udspændt af bestemte vektorer, ikke nødvendigvis at disse vektorer er lineært uafhængige. Den procedure, vi benyttede os af i Eksempel 9.3.7 for at finde en basis, kan generaliseres. Lad os gøre det i følgende sætning:

Sætning 9.3.3

Lad et underum W af vektorrummet $\mathbb{F}^n$ være udspændt af vektorerne $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_\ell$. Antag videre, at den reducerede trappeform af matricen med søjlerne $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_\ell$ har pivoter i søjlerne $j_1, \ldots, j_\rho$. Da er $\{\mathbf{u}_{j_1}, \ldots, \mathbf{u}_{j_\rho}\}$ en basis for W.

Bevis. Lad os betegne matricen med søjlerne $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_\ell$ ved $\mathbf{A}$ og den reducerede trappeform af $\mathbf{A}$ ved $\mathbf{B}$. Jævnfør definitionen på den reducerede trappeform af en matrix udgøres søjlerne i $\mathbf{B}$ med søjleindekser $i_1, \ldots, i_\rho$ af de første ρ standardbasisvektorer $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_\rho$. Vi ved, at disse er lineært uafhængige. Vi påstår nu, at dette medfører, at søjlerne i $\mathbf{B}$ med søjleindekser $i_1, \ldots, i_\rho$ også er lineært uafhængige. Hvis $c_{j_1} \cdot \mathbf{u}_{j_1} + \cdots + c_{j_\rho} \cdot \mathbf{u}_{j_\rho} = \mathbf{0}$, så er tuplet $(v_1, \ldots, v_\ell) \in \mathbb{F}^\ell$, der defineres ved $v_j = c_j$, hvis $j \in \{j_1, \ldots, j_\rho\}$, og ellers ved $v_j = 0$, en løsning til det homogene system af lineære ligninger med koefficientmatrix $\mathbf{A}$. Men vi ved, at enhver sådan løsning også er en løsning til det homogene system med koefficientmatrix $\mathbf{B}$. Da vi allerede har observeret, at søjlerne i $\mathbf{B}$ med søjleindekser $i_1, \ldots, i_\rho$ er lineært uafhængige, konkluderer vi, at der nødvendigvis gælder, at $c_{j_1} = 0, \ldots, c_{j_\rho} = 0$. Dette viser, at vektorerne $\{\mathbf{u}_{j_1}, \ldots, \mathbf{u}_{j_\rho}\}$ er lineært uafhængige.

Vælg nu en hvilken som helst søjle $\mathbf{u}_j$ i $\mathbf{A}$, for hvilken $j \notin \{j_1, \ldots, j_\rho\}$. Igen ser vi af definitionen på den reducerede trappeform, at den j'te søjle i $\mathbf{B}$ har nuller som sine sidste $n - \rho$ elementer. Derfor kan den udtrykkes som en linearkombination af $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_\rho$, hvilke blot er søjlerne $j_1, \ldots, j_\ell$ i $\mathbf{B}$. Dette betyder, at det homogene system med koefficientmatrix $\mathbf{B}$ har en løsning $(v_1, \ldots, v_\ell)$, således at $v_j = 1$, og $v_k = 0$ for alle $k \notin \{j, j_1, \ldots, j_\rho\}$. Ved at udnytte at dette også er en løsning til det homogene system af lineære ligninger med koefficientmatrix $\mathbf{A}$, får vi nu, at den j'te søjle i $\mathbf{A}$ kan udtrykkes som en linearkombination af søjlerne $j_1, \ldots, j_\rho$. Dette beviser, at udspændingen af $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_\ell$ er den samme som udspændingen af $\mathbf{u}_{j_1}, \ldots, \mathbf{u}_{j_\rho}$.

Kombineres alt det ovenstående, kan vi konkludere, at $\{\mathbf{u}_{j_1}, \ldots, \mathbf{u}_{j_\rho}\}$ udgør en basis for W. □

Tilbage i Sætning 6.4.4 blev løsningsmængden til et homogent system af lineære ligninger netop beskrevet som udspændingen af $n - \rho$ vektorer. I det tilfælde dannede disse vektorer faktisk en basis for løsningsmængden, da de var lineært uafhængige. Lad os vise dette nu.

Korollar 9.3.4

Lad et homogent system af m lineære ligninger i n variable over et legeme $\mathbb{F}$ være givet. Betegn koefficientmatricen for dette system ved $\mathbf{A}$, og antag, at denne matrix har rang ρ. De $n - \rho$ vektorer $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-\rho}$, som er angivet i Sætning 6.4.4, udgør en basis for løsningen til det homogene system af lineære ligninger med koefficientmatrix $\mathbf{A}$.

Bevis. Lad os vise en skitse af beviset: vi benytter samme notation for vektorerne $\mathbf{c}_i$ og matricen $\hat{\mathbf{A}}$ som i Sætning 6.4.4. Ser vi tilbage på, hvordan vektoren $\mathbf{v}_i$ blev defineret i Sætning 6.4.4, ser vi, at $\mathbf{v}_i$ har et 1-tal i koordinatposition j, hvor j opfylder, at $\mathbf{c}_i$ er den j'te søjle i $\hat{\mathbf{A}}$. Ligeledes ser vi, at $\mathbf{v}_i$ har koefficienter lig med 0 derefter, da $\mathbf{c}_i$ kun indeholder nuller efter sin i'te koefficient. Derfor er matricen med søjlerne $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-\rho}$ på trappeform. Dette medfører, at den tilsvarende matrix på reduceret trappeform har en pivot i hver søjle. Sætning 9.3.3 medfører da, at $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-\rho}\}$ udgør en basis. □

Korollar 9.3.5

Lad V være et vektorrum over et legeme $\mathbb{F}$ af endelig dimension n med ordnet basis β, og lad $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_\ell$ være vektorer i V. Antag videre, at den reducerede trappeform af matricen med søjlerne $[\mathbf{u}_1]_\beta, \ldots, [\mathbf{u}_\ell]_\beta$ har pivoter i søjlerne $j_1, \ldots, j_\rho$. Da er en basis for $\mathrm{Span}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_\ell)$ givet ved $\{\mathbf{u}_{j_1}, \ldots, \mathbf{u}_{j_\rho}\}$.

Bevis. Vi viser en skitse af beviset: vi har fra Sætning 9.3.3, at en basis for underrummet af $\mathbb{F}^n$, der er genereret af $[\mathbf{u}_1]_\beta, \ldots, [\mathbf{u}_\ell]_\beta$, er givet ved $\{[\mathbf{u}_{j_1}]_\beta, \ldots, [\mathbf{u}_{j_\rho}]_\beta\}$. Nu kan Sætning 9.2.3 anvendes til at vise, at $\{\mathbf{u}_{j_1}, \ldots, \mathbf{u}_{j_\rho}\}$ udgør en basis for $\mathrm{Span}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_\ell)$. □

9.4 Ekstra: hvorfor har ethvert vektorrum en basis?

Dette afsnit er ikke obligatorisk læsning og kan springes over. Det er tænkt som ekstra materiale for en studerende, der har tid og motivation til det.

I de tidligere afsnit har vi uden videre benyttet det faktum, at ethvert vektorrum V har en basis. For at bevise dette antagede faktum, skal vi studere mængden $\mathcal{I}(V)$, som består af alle delmængder af V, hvis elementer er lineært uafhængige vektorer. For eksempel er $\emptyset \in \mathcal{I}(V)$, da den tomme mængde ikke indeholder nogen vektorer og derfor ikke kan indeholde lineært afhængige vektorer. Hvis $V \neq \{\mathbf{0}\}$, er enhver delmængde af formen $\{\mathbf{v}\}$ i $\mathcal{I}(V)$, så længe $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Intuitivt bør en basis B for V være en mængde, der indeholder så mange lineært uafhængige vektorer som muligt. Mere præcist ville denne intuition sige, at $B \in \mathcal{I}(V)$, og at ingen mængde af lineært uafhængige vektorer kan indeholde B som en skarpt mindre delmængde. Denne anden intuitive egenskab kan omformuleres ved at sige, at hvis $C \in \mathcal{I}(V)$, og $B \subseteq C$, så er $B = C$. En sådan B kaldes et maksimalelement i $\mathcal{I}(V)$.

Ovenstående diskussion har kun til formål at give en intuitiv forståelse, men den følgende sætning viser, at der er substans i diskussionen.

Sætning 9.4.1
Lad B være et maksimalelement i $\mathcal{I}(V)$. Da er B en basis for V.

Bevis. Jævnfør definitionen af $\mathcal{I}(V)$ er vektorerne i B lineært uafhængige. Det, vi skal vise, er, at enhver vektor i V kan skrives som en linearkombination af vektorerne i B. Antag, at dette ikke er tilfældet. Da findes der en $\mathbf{v} \in V$, således at enhver linearkombination af vektorer i B er forskellig fra $\mathbf{v}$. Vi hævder, at mængden $B \cup \{\mathbf{v}\}$ i dette tilfælde består af lineært uafhængige vektorer. For at vise dette, antager vi, at

$$c_0 \cdot \mathbf{v} + c_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + c_n \cdot \mathbf{v}_n = \mathbf{0} \tag{9.5}$$

for nogle $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$ og $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in B$. Hvis $c_0 = 0$, ser vi straks, at $c_1 = 0, \ldots, c_n = 0$, da vektorerne i B er lineært uafhængige. Dog kan c_0 ikke være forskellig fra nul, da Ligning (9.5) dermed ville medføre, at $\mathbf{v} = -c_0^{-1} \cdot c_1 \cdot \mathbf{v}_1 - \cdots - c_0^{-1} \cdot c_n \cdot \mathbf{v}_n$, i strid med antagelsen om, at $\mathbf{v}$ ikke kan skrives som en linearkombination af vektorer fra B. Derfor består mængden $B \cup \{\mathbf{v}\}$ rent faktisk af lineært uafhængige vektorer som hævdet. En anden måde at sige dette på er, at $B \cup \{\mathbf{v}\} \in \mathcal{I}(V)$, hvilket igen medfører, at B ikke var et maksimalelement i $\mathcal{I}(V)$, i strid med antagelsen om, at det var. Modstriden viser, at enhver vektor i V kan skrives som en linearkombination af vektorer fra B. Derfor er B en basis. $\square$

Sætningen har følgende konsekvens: for at vise, at ethvert vektorrum V har en basis, er det nok at vise, at mængden $\mathcal{I}(V)$ altid indeholder et maksimalelement. Dette er en direkte konsekvens af et berømt lemma kaldet Zorns lemma. At formulere og bevise Zorns lemma kræver dog værktøjer fra grundlæggende matematik, som ligger uden for rammerne af denne tekst.