Kapitel 8

Determinanter

8.1 Determinanten af en kvadratisk matrix

I dette afsnit vil vi introducere *determinanten* af en kvadratisk matrix. Determinanter bliver nyttige, når vi undersøger, om en given matrix er invertibel, og vil også blive særdeles nyttige i senere kapitler. Vi starter med en notationskonvention:

Definition 8.1.1
Lad $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le n} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ være en givet kvadratisk matrix. Da definerer vi matricen $\mathbf{A}(i;j) \in \mathbb{F}^{(n-1)\times(n-1)}$ som:

$$\mathbf{A}(i;j) = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \dots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \dots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & \dots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \dots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

I ord: Matricen $\mathbf{A}(i;j)$ opnås fra $\mathbf{A}$ ved at den i'te række og den j'te søjle i $\mathbf{A}$ fjernes. Med dette på plads kan vi definere determinanten af en kvadratisk matrix rekursivt som følger:

Definition 8.1.2
Lad $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ være en kvadratisk matrix. Vi definerer da

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{cases} \mathbf{A} & \text{hvis } n = 1, \\ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot \det(\mathbf{A}(i;1)) & \text{hvis } n \geq 2. \end{cases}$$

Uden brug af summationssymbolet kan man også skrive:

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11} \cdot \det(\mathbf{A}(1;1)) - a_{21} \cdot \det(\mathbf{A}(2;1)) + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot a_{n1} \cdot \det(\mathbf{A}(n;1)).$$

Eksempel 8.1.1

Lad

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

For at beregne determinanten af denne matrix vil vi benytte Definition 8.1.2. Vi ser, at $\mathbf{A}(1;1) = a_{22}$, og at $\mathbf{A}(2;1) = a_{12}$. Derfor har vi

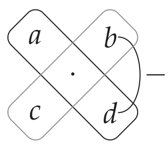
$$\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = a_{11} \cdot \det(a_{22}) - a_{21} \cdot \det(a_{12}) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Benyttes bogstaver a, b, c og d som matricens elementer, kan vi skrive dette som:

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad - bc. \tag{8.1}$$

Når man får til opgave at beregne determinanten af en 2×2-matrix, er denne formel særdeles praktisk. Figur 8.1 visualiserer formlen for determinanten af en 2×2-matrix: udregningen foregår ved, at man multiplicerer matricens to diagonalelementer og trækker produktet af de to andre elementer fra.

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) =$$



$$= ad - cb.$$

Figur 8.1: Determinanten af en 2×2-matrix.

Eksempel 8.1.2

Lad $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ samt

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

ligesom i Eksempel 7.3.2. Udregn determinanten af $\mathbf{A}$.

Svar: Vi har først og fremmest, at

$$\mathbf{A}(1;1) = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}, \mathbf{A}(2;1) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}, \text{ og } \mathbf{A}(3;1) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Derfor får vi ved brug af Definition 8.1.2:

$$\det(\mathbf{A}) = 1 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}\right) - 4 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}\right) + 5 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\right).$$

Med Ligning (8.1) kan vi hurtigt beregne determinanterne af 2×2-matricer. Dermed får vi:

$$\det(\mathbf{A}) = 1 \cdot (45 - 42) - 4 \cdot (18 - 21) + 5 \cdot (12 - 15) = 3 + 12 - 15 = 0.$$

Vi får senere hen nogle flere teknikker til beregning af determinanter af matricer, men for nu vil vi koncentrere os om en særlig klasse af matricer.

Definition 8.1.3

En matrix $\mathbf{A} = \mathbb{F}^{n \times n}$ kaldes en *diagonalmatrix*, hvis der findes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$, således at

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Vi har tidligere nævnt, at elementerne $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ i en kvadratisk matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \le i \le n; 1 \le j \le n}$ kaldes diagonalelementer i $\mathbf{A}$. Dette forklarer betegnelsen diagonalmatrix i Definition 8.1.3: en diagonalmatrix er en kvadratisk matrix, hvis elementer alle er nuller bortset fra dem i diagonalen. For eksempel er identitetsmatricen $\mathbf{I}_n$, som introduceret i starten af Afsnit 7.3, en diagonalmatrix, hvis diagonalelementer alle er lig med 1.

Proposition 8.1.1

Lad $\mathbf{A} = \mathbb{F}^{n \times n}$ være en diagonalmatrix med diagonalelementerne $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Da er

$$\det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \cdots \cdot \lambda_n.$$

Særligt er $\det(\mathbf{I}_n) = 1$.

Bevis. Vi viser dette ved induktion på n. Hvis $n = 1$, så er $\mathbf{A} = \lambda_1$, og Definition 8.1.2 medfører så, at $\det(\mathbf{A}) = \lambda_1$. Antag nu, at $n \geq 2$, og at udsagnet gælder for diagonalmatricer i $\mathbb{F}^{(n-1)\times(n-1)}$. Ved at anvende Definition 8.1.2 får vi, at:

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}) &= \lambda_1 \cdot \det(\mathbf{A}(1;1)) - 0 \cdot \det(\mathbf{A}(2;1)) + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot 0 \cdot \det(\mathbf{A}(n;1)) \\ &= \lambda_1 \cdot \det(\mathbf{A}(1;1)) \\ &= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \cdots \cdot \lambda_n,\end{aligned}$$

hvor vi i den sidste lighed anvendte induktionshypotesen. Induktionshypotesen gælder, da $\mathbf{A}(1;1)$ er en diagonalmatrix med diagonalelementerne $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Dette afslutter induktionstrinnet. Vi konkluderer ved induktionsprincippet, at udsagnet er sandt. Det særlige tilfælde med identitetsmatricen følger nu straks, da alle diagonalelementer i så fald er lig med én. □

Vi kan allerede nu opstille en formel for determinanten af matricer i en større klasse, nemlig de øvre trekantmatricer:

Definition 8.1.4

En matrix $\mathbf{A} = \mathbb{F}^{n\times n}$ kaldes en *øvre trekantsmatrix*, hvis der findes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ og $a_{ij} \in \mathbb{F}$ for $1 \leq i < j \leq n$, således at

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_{n-1} & a_{n-1\,n} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

I ord: i en øvre trekantsmatrix er alle de elementer, der ikke er nul, placeret over eller i diagonalen. Alle elementer under diagonalen i en øvre trekantsmatrix er nul.

Sætning 8.1.2

Lad $\mathbf{A} = \mathbb{F}^{n\times n}$ være en øvre trekantsmatrix med diagonalelementerne $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Da er

$$\det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \cdots \cdot \lambda_n.$$

Bevis. Beviset er meget lig beviset for Proposition 8.1.1 og overlades til læseren. □

En tilsvarende type matricer er følgende:

Definition 8.1.5

En matrix $\mathbf{A} = \mathbb{F}^{n\times n}$ kaldes en *nedre trekantsmatrix*, hvis der findes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ og $a_{ij} \in \mathbb{F}$

for $1 \leq j < i \leq n$, således at

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1\,1} & \dots & a_{n-1\,n-2} & \lambda_{n-1} & 0 \\ a_{n\,1} & \dots & a_{n\,n-2} & a_{n\,n-1} & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

I ord: i en nedre trekantsmatrix er alle de elementer, der ikke er nul, placeret under eller i diagonalen. Alle elementer over diagonalen i en nedre trekantsmatrix er nul. Også her kan vi opskrive en formel for dens determinant. Inden da har vi brug for et lemma, som kan være nyttigt i sig selv.

Lemma 8.1.3

Hvis en kvadratisk matrix i $\mathbb{F}^{n \times n}$ indeholder en nulrække, er dens determinant nul.

Bevis. Dette kan vises ved induktion på n. Detaljerne overlades til læseren. □

Sætning 8.1.4

Lad $\mathbf{A} = \mathbb{F}^{n \times n}$ være en nedre trekantsmatrix med diagonalelementerne $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Da er

$$\det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n.$$

Bevis. Vi viser dette ved induktion på n. Hvis $n = 1$, så er $\mathbf{A} = \lambda_1$, og Definition 8.1.2 medfører så, at $\det(\mathbf{A}) = \lambda_1$. Antag nu, at $n \geq 2$, og at udsagnet gælder for nedre trekantsmatricer i $\mathbb{F}^{(n-1)\times(n-1)}$. Bemærk, at $\mathbf{A}(1;1)$ er en nedre trekantsmatrix med diagonalelementerne $\lambda_2, \dots, \lambda_n$. Derfor medfører induktionshypotesen, at $\det(\mathbf{A}(1;1)) = \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$. Matricerne $\mathbf{A}(2;1), \dots, \mathbf{A}(n;1)$ har alle en nulrække som første række. Dette skyldes, at det eneste element, der ikke er nul, i første række i $\mathbf{A}$, er at finde på den første elementposition, men denne position er blevet fjernet i matricerne $\mathbf{A}(2;1), \dots, \mathbf{A}(n;1)$. Ved Lemma 8.1.3 har vi derfor, at $\det(\mathbf{A}(2;1)) = 0, \dots, \det(\mathbf{A}(n;1)) = 0$.

Ved hjælp af Definition 8.1.2 ser vi da, at:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \lambda_1 \cdot \det(\mathbf{A}(1;1)) - a_{21} \cdot \det(\mathbf{A}(2;1)) + \dots + (-1)^{n+1} \cdot a_{n1} \cdot \det(\mathbf{A}(n;1)) \\ &= \lambda_1 \cdot \det(\mathbf{A}(1;1)) - a_{21} \cdot 0 + \dots + (-1)^{n+1} \cdot a_{n1} \cdot 0 \\ &= \lambda_1 \cdot \det(\mathbf{A}(1;1)) \\ &= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n, \end{aligned}$$

hvor vi i den sidste lighed anvendte induktionshypotesen. Dette afslutter induktionstrinnet. Vi konkluderer ved induktionsprincippet, at sætningen er sand. □

8.2 Determinanter og elementære rækkeoperationer

Definition 8.1.2 er ikke altid den hurtigste måde at beregne determinanten af en kvadratisk matrix på. I vores studie af systemer af lineære ligninger definerede vi tre typer af elementære rækkeoperationer, der kunne benyttes til effektiv simplificering af et givet system. Motiveret af dette vil vi nu undersøge effekten af disse tre typer af elementære rækkeoperationer på værdien af en determinant. Den, der er nemmest at håndtere, er den elementære rækkeoperation af typen $R_i \leftarrow c \cdot R_i$. Vi starter med at bevise et generelt resultat.

Sætning 8.2.1

Betragt følgende tre matricer i $\mathbb{F}^{n \times n}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} - & \mathbf{a}_1 & - \\ & \vdots & \\ - & \mathbf{a}_{i-1} & - \\ - & \mathbf{a}_i & - \\ - & \mathbf{a}_{i+1} & - \\ & \vdots & \\ - & \mathbf{a}_n & - \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} - & \mathbf{a}_1 & - \\ & \vdots & \\ - & \mathbf{a}_{i-1} & - \\ - & \mathbf{b}_i & - \\ - & \mathbf{a}_{i+1} & - \\ & \vdots & \\ - & \mathbf{a}_n & - \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} - & \mathbf{a}_1 & - \\ & \vdots & \\ - & \mathbf{a}_{i-1} & - \\ - & c \cdot \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i & - \\ - & \mathbf{a}_{i+1} & - \\ & \vdots & \\ - & \mathbf{a}_n & - \end{bmatrix},$$

hvor $c \in \mathbb{F}$. Da gælder der, at $\det(\mathbf{C}) = c \cdot \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})$.

Bevis. Vi benytter induktion på n. Hvis $n = 1$, har vi $\mathbf{A} = a$ for en $a \in \mathbb{F}$, $\mathbf{B} = b$ for en $b \in \mathbb{F}$ og $\mathbf{C} = c \cdot a + b$. Ifølge Definition 8.1.2 ser vi så, at $\det(\mathbf{C}) = c \cdot a + b = c \cdot \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})$.

Antag nu, at $n \geq 2$, og at sætningen gælder for $(n-1) \times (n-1)$-matricer. Lad os ved $\sum_{k=1;k\neq i}^{n} (-1)^{k+1} \cdot c_{k1} \cdot \det(\mathbf{C}(k;1))$ betegne den summation, man opnår ved at lade k løbe fra 1 til n, hvor værdien i springes over. Da kan vi skrive

$$\det(\mathbf{C}) = \sum_{k=1;k\neq i}^{n} (-1)^{k+1} \cdot c_{k1} \cdot \det(\mathbf{C}(k;1)) + (-1)^{i+1} \cdot c_{i1} \cdot \det(\mathbf{C}(i;1)).$$

For alle k forskellige fra i medfører induktionshypotesen, at $\det(\mathbf{C}(k;1)) = c \cdot \det(\mathbf{A}(k;1)) + \det(\mathbf{B}(k;1))$. Ydermere er $\mathbf{C}(i;1) = \mathbf{A}(i;1) = \mathbf{B}(i;1)$, da den i'te række er den eneste række, hvor matricerne $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ og $\mathbf{C}$ adskiller sig fra hinanden. Ved at udnytte, at $c_{i1} = c \cdot a_{i1} + b_{i1}$, og $c_{k1} = a_{k1}$, hvis $k \neq i$, ser vi nu, at

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{C}) &= \sum_{k=1;k\neq i}^{n} (-1)^{k+1} \cdot a_{k1} \cdot \det(\mathbf{C}(k;1)) + \\ & \quad (-1)^{i+1} \cdot (a_{i1} + b_{i1}) \cdot \det(\mathbf{C}(i;1)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1;k\neq i}^{n} (-1)^{k+1} \cdot a_{k1} \cdot (c \cdot \det(\mathbf{A}(k;1)) + \det(\mathbf{B}(k;1))) \\
&\quad +(-1)^{i+1} \cdot c \cdot a_{i1} \cdot \det(\mathbf{A}(i;1)) + (-1)^{i+1} \cdot b_{i1} \cdot \det(\mathbf{B}(i;1)) \\
&= \sum_{k=1;k\neq i}^{n} c \cdot (-1)^{k+1} \cdot a_{k1} \cdot \det(\mathbf{A}(k;1)) + (-1)^{i+1} \cdot c \cdot a_{i1} \cdot \det(\mathbf{A}(i;1)) \\
&\quad + \sum_{k=1;k\neq i}^{n} (-1)^{k+1} \cdot b_{k1} \cdot \det(\mathbf{B}(k;1))) + (-1)^{i+1} \cdot b_{i1} \cdot \det(\mathbf{B}(i;1)) \\
&= c \cdot \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B}).
\end{aligned}
$$

Dette afslutter induktionstrinnet og dermed induktionsbeviset. □

Korollar 8.2.2

Lad $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ være givet, og antag, at $\mathbf{C}$ er opnået fra $\mathbf{A}$ ved anvendelse af den elementære rækkeoperation $R_i \leftarrow c \cdot R_i$ på $\mathbf{A}$ for et i og et $c \in \mathbb{F}$. Da gælder der, at $\det(\mathbf{C}) = c \cdot \det(\mathbf{A})$.

Bevis. Hvis vi vælger $\mathbf{b}_i = \mathbf{0}$ i Sætning 8.2.1, får vi, at $\det(\mathbf{C}) = c \cdot \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})$, hvor $\mathbf{B}$ er en matrix, hvis i'te række er nulrækken. Sætning 8.1.3 medfører, at $\det(\mathbf{B}) = 0$. Deraf følger korollaret. □

Undersøgelsen af effekterne af de to resterende typer af elementære rækkeoperationer på værdien af determinanten viser sig mere indviklet. I opsummering bliver effekten af disse operationer følgende:

$$\text{Anvendelse af } R_i \leftrightarrow R_j \text{ på en kvadratisk matrix ændrer fortegnet på determinanten.} \tag{8.2}$$

$$\text{Anvendelse af } R_i \leftarrow R_i + c \cdot R_j \text{ på en kvadratisk matrix påvirker ikke determinanten.} \tag{8.3}$$

Eksempel 8.2.1

Lad $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ og

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

som i Eksempel 7.3.2. Udregn determinanten af $\mathbf{A}$ ved hjælp af elementære rækkeoperationer.

Svar: Fra Eksempel 7.3.2 kan vi aflæse, at:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix} \underset{R_2 \leftarrow R_2 - 4 \cdot R_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\underset{R_3 \leftarrow R_3 - 5\cdot R_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \underset{R_3 \leftarrow R_3 - R_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Anvendes Ligning (8.3) tre gange, kan vi konkludere, at

$$\det(\mathbf{A}) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right).$$

Bemærk nu, at matricen på højre side er en øvre trekantsmatrix. Ved anvendelse af Sætning 8.1.2 får vi derfor, at

$$\det(\mathbf{A}) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1\cdot(-3)\cdot 0 = 0.$$

Vi vil bruge resten af dette afsnit på at bevise gyldigheden af Ligningerne (8.2) og (8.3). En læser, der er villig til at acceptere deres gyldighed uden bevis, kan gå direkte videre til Afsnit 8.3. Læsere, der ønsker at se beviserne for Ligningerne (8.2) og (8.3), er velkomne til at læse videre, men det kan være en fordel at have læst Afsnit 8.3 først.

Vi starter med to lemmaer.

Lemma 8.2.3

Antag, at $n \geq 2$, og lad en kvadratisk matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ være givet. Desuden betegnes ved $\mathbf{B} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ den matrix, der opnås fra $\mathbf{A}$ ved at bytte rundt på to på hinanden følgende rækker i $\mathbf{A}$. Da gælder der, at $\det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{A})$.

Bevis. Vi beviser dette ved induktion på n.

Hvis $n = 2$, har vi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix},$$

hvilket medfører $\det(\mathbf{A}) = a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{12}$ og $\det(\mathbf{B}) = a_{21}\cdot a_{12} - a_{11}\cdot a_{22}$. Derfor har vi, at $\det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{A})$.

Lad nu $n \geq 3$, og antag, at lemmaet gælder for $n-1$. Lad os betegne de to rækker i $\mathbf{A}$, som har byttet plads, ved R_i og R_{i+1}. Da ser vi, at $\mathbf{A}(i;1) = \mathbf{B}(i+1;1)$, og $\mathbf{A}(i+1;1) = \mathbf{B}(i;1)$. For $k \neq i$ og $k \neq i+1$ kan $\mathbf{B}(k;1)$ desuden opnås fra $\mathbf{A}(k;1)$ ved, at to på hinanden følgende rækker byttes rundt. Ifølge induktionshypotesen har vi derfor for sådanne k, at $\det(\mathbf{B}(k;1)) = -\det(\mathbf{A}(k;1))$. Samles det hele, får vi:

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{B}) &= \sum_{k=1;k\neq i;k\neq i+1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot a_{k1} \cdot \det(\mathbf{B}(k;1)) \\
&\quad +(-1)^{i+1} \cdot a_{i+1\,1} \cdot \det(\mathbf{B}(i;1)) + (-1)^{i+2} \cdot a_{i\,1} \cdot \det(\mathbf{B}(i+1;1)) \\
&= -\sum_{k=1;k\neq i;k\neq i+1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot a_{k1} \cdot \det(\mathbf{A}(k;1)) \\
&\quad +(-1)^{i+1} \cdot a_{i+1\,1} \cdot \det(\mathbf{A}(i+1;1)) + (-1)^{i+2} \cdot a_{i\,1} \cdot \det(\mathbf{A}(i;1)) \\
&= -\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot a_{k1} \cdot \det(\mathbf{A}(k;1)) \\
&= -\det(\mathbf{A}).
\end{aligned}$$

Dette afslutter induktionstrinnet og dermed beviset. □

Lemma 8.2.4

Antag, at $n \geq 2$, og lad en kvadratisk matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ være givet. Antag, at to på hinanden følgende rækker i $\mathbf{A}$ er identiske. Da gælder der, at $\det(\mathbf{A}) = 0$.

Bevis. Dette kan vises ved at følge den samme strategi som i beviset for Lemma 8.2.3. □

Ovenstående lemma er blot et særtilfælde af et mere generelt resultat:

Proposition 8.2.5

Antag, at $n \geq 2$, og lad en kvadratisk matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ være givet. Antag, at to rækker i $\mathbf{A}$ er identiske. Da er $\det(\mathbf{A}) = 0$.

Bevis. Hvis to på hinanden følgende rækker i $\mathbf{A}$ er identiske, medfører Lemma 8.2.4, at $\det(\mathbf{A}) = 0$. Derfor står vi tilbage med tilfældet, hvor to rækker i $\mathbf{A}$ er identiske men ikke på hinanden følgende. Lad os betegne de to givne identiske rækker i $\mathbf{A}$ ved R_i og R_j, hvor $i > j \geq 1$. Vi bytter rundt på rækkerne R_i og R_{i-1}, og flytter dermed rækken R_i højere op i matricen. Effekten på determinanten er et fortegnsskift ifølge Lemma 8.2.3. I den nye matrix er de identiske rækker nu R_j og R_{i-1}. Hvis disse rækker er på hinanden følgende, stopper vi med at bytte rækker, men ellers flytter vi den nederste af de to identiske rækker op, én række ad gangen. Således ender vi på et tidspunkt med en matrix $\mathbf{B}$ med to på hinanden følgende rækker. Jævnfør Lemma 8.2.3 skifter determinanten fortegn, $\det(\mathbf{B}) = \pm\det(\mathbf{A})$, hver gang vi bytter rundt på to på hinanden følgende rækker. Men da vi ifølge Lemma 8.2.4 har $\det(\mathbf{B}) = 0$, konkluderer vi, at $\det(\mathbf{A}) = 0$. □

Vi har nu alle de nødvendige ingredienser til at vise effekten på determinanten af en kvadratisk matrix af at bytte om på to rækker.

Sætning 8.2.6

Lad en kvadratisk matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ være givet, og betegn ved $\mathbf{B} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ en matrix opnået fra $\mathbf{A}$ ved hjælp af en elementær rækkeoperation af formen $R_i \leftrightarrow R_j$ for nogle heltal $i < j$. Da gælder der, at $\det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{A})$.

Bevis. Vi opskriver

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} - & \mathbf{a}_1 & - \\ & \vdots & \\ - & \mathbf{a}_{i-1} & - \\ - & \mathbf{a}_i & - \\ - & \mathbf{a}_{i+1} & - \\ & \vdots & \\ - & \mathbf{a}_{j-1} & - \\ - & \mathbf{a}_j & - \\ - & \mathbf{a}_{j+1} & - \\ & \vdots & \\ - & \mathbf{a}_n & - \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} - & \mathbf{a}_1 & - \\ & \vdots & \\ - & \mathbf{a}_{i-1} & - \\ - & \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j & - \\ - & \mathbf{a}_{i+1} & - \\ & \vdots & \\ - & \mathbf{a}_{j-1} & - \\ - & \mathbf{a}_j + \mathbf{a}_i & - \\ - & \mathbf{a}_{j+1} & - \\ & \vdots & \\ - & \mathbf{a}_n & - \end{bmatrix}.$$

Ved at anvende Sætning 8.2.1 på række i i $\mathbf{C}$, ser vi, at

$$\det(\mathbf{C}) = \det\left(\begin{bmatrix} - & \mathbf{a}_1 & - \\ & \vdots & \\ - & \mathbf{a}_{i-1} & - \\ - & \mathbf{a}_i & - \\ - & \mathbf{a}_{i+1} & - \\ & \vdots & \\ - & \mathbf{a}_{j-1} & - \\ - & \mathbf{a}_j + \mathbf{a}_i & - \\ - & \mathbf{a}_{j+1} & - \\ & \vdots & \\ - & \mathbf{a}_n & - \end{bmatrix}\right) + \det\left(\begin{bmatrix} - & \mathbf{a}_1 & - \\ & \vdots & \\ - & \mathbf{a}_{i-1} & - \\ - & \mathbf{a}_j & - \\ - & \mathbf{a}_{i+1} & - \\ & \vdots & \\ - & \mathbf{a}_{j-1} & - \\ - & \mathbf{a}_j + \mathbf{a}_i & - \\ - & \mathbf{a}_{j+1} & - \\ & \vdots & \\ - & \mathbf{a}_n & - \end{bmatrix}\right).$$

Nu anvender vi igen Sætning 8.2.1, men denne gang på række j i matricerne i de to determinantudtryk på højre side af denne ligning og bruger derefter Proposition 8.2.5. Så får vi, at

$$\det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B}).$$

Men Proposition 8.2.5 medfører, at $\det(\mathbf{C}) = 0$, da rækkerne i og j i $\mathbf{C}$ er identiske. Derfor gælder $0 = \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})$, hvilket medfører, hvad vi ønskede at vise. □

Nu hvor vi kender effekten af de elementære rækkeoperationer $R_i \leftarrow c \cdot R_i$ og $R_i \leftrightarrow R_j$ på determinanten, afslutter vi med et blik på, hvad der sker med determinanten, når vi benytter en elementær rækkeoperation af formen $R_i \leftarrow R_i + c \cdot R_j$.

Sætning 8.2.7

Lad $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ være givet, og antag, at matricen $\mathbf{B}$ er opnået fra $\mathbf{A}$ ved anvendelse af den elementære rækkeoperation $R_i \leftarrow R_i + c \cdot R_j$ på $\mathbf{A}$ for forskellige rækkeindekser i, j og for et $c \in \mathbb{F}$. Da gælder der, at $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})$.

Bevis. Dette følger af Sætning 8.2.1 og Proposition 8.2.5. □

8.3 Alternative beskrivelser af determinanten

I vores beskrivelse af determinanten af en kvadratisk matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ spillede den første søjle i $\mathbf{A}$ en særlig rolle. I den rekursive definition gangede vi trods alt elementer fra den første søjle i $\mathbf{A}$ med determinanterne af mindre matricer. Disse mindre matricer blev opnået fra $\mathbf{A}$ ved at fjerne den første søjle og nogle rækker. Af den grund siger man typisk, at man i Definition 8.1.2 beregner determinanten ved at udvikle langs den første søjle. Mere præcist refererer man ofte til dette som *udviklingen* eller *Laplace-udviklingen* af determinanten langs den første søjle.

Man kan nu spørge, om der er nogen grund til, at den første søjle er så speciel. Svaret er: det er den ikke! Det er muligt at udregne determinanter ved udvkling langs andre søjler og faktisk også ved udvikling langs rækker. Mere præcist har vi følgende sætning:

Sætning 8.3.1

Lad $n \geq 2$, og lad $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ være en kvadratisk matrix. Da gælder der for et ethvert j mellem 1 og n:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(\mathbf{A}(i;j)). \tag{8.4}$$

Yderligere gælder der for ethvert i mellem 1 og n:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(\mathbf{A}(i;j)). \tag{8.5}$$

Bevis. Vi vil ikke bevise denne sætning, men den interesserede læser kan finde nogle bemærkninger i slutningen af dette afsnit, der forklarer de vigtigste ideer bag beviset. □

Bemærk, at for $j = 1$ er Ligning (8.4) blot den formel, der er givet for determinanten i Definition 8.1.2. Ligning (8.4) beskriver Laplace-udviklingen af determinanten langs den

j'te søjle, mens Ligning (8.5) beskriver Laplace-udviklingen af determinanten langs den i'te række. Disse ligninger kan også udtrykkes uden brug af summationssymbolet på følgende måde:

$$\det(\mathbf{A}) = (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot \det(\mathbf{A}(1;j)) + (-1)^{2+j} \cdot a_{2j} \cdot \det(\mathbf{A}(2;j)) + \cdots + (-1)^{n+j} \cdot a_{nj} \cdot \det(\mathbf{A}(n;j)).$$

og

$$\det(\mathbf{A}) = (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot \det(\mathbf{A}(i;1)) + (-1)^{i+2} \cdot a_{i2} \cdot \det(\mathbf{A}(i;2)) + \cdots + (-1)^{i+n} \cdot a_{in} \cdot \det(\mathbf{A}(i;n)).$$

Eksempel 8.3.1

Lad $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ og

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

som i Eksempel 7.3.2. Udregn determinanten af $\mathbf{A}$ ved anvendelse af Laplace-udvikling langs den første række.

Svar: Bemærk først og fremmest, at

$$\mathbf{A}(1;1) = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}, \mathbf{A}(1;2) = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}, \text{ og } \mathbf{A}(1;3) = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Derfor opnår vi ved anvendelse af Laplace-udvikling langs den første række, at

$$\det(\mathbf{A}) = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}\right) + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}\right) + (-1)^{1+3} \cdot 3 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}\right).$$

Ved brug af Ligning (8.1) kan vi hurtigt beregne determinanterne af 2×2-matricer, og vi får:

$$\det(\mathbf{A}) = 1 \cdot (45 - 42) - 2 \cdot (36 - 30) + 3 \cdot (28 - 25) = 3 - 12 + 9 = 0.$$

Sætning 8.3.1 har en fin konsekvens i forbindelse med transponerede matricer.

Korollar 8.3.2

Lad $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ være givet. Da gælder der, at $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$.

Bevis. Vi bruger induktion på n. Hvis $n = 1$, er $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, og der gælder klart, at $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$. Antag nu at $n \geq 2$, og at korollaret gælder for $n - 1$. Bemærk, at $\mathbf{A}(j;1)^T = \mathbf{A}^T(1;j)$, hvilket sammen med induktionshypotesen lader os udnytte, at $\det(\mathbf{A}^T(1;j)) = \det(\mathbf{A}(j;1)^T) = \det(\mathbf{A}(j;1))$. Ved anvendelse af Laplace-udvikling af determinanten af $\mathbf{A}^T$ langs den første række, få vi

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}^T) &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}\cdot(\mathbf{A}^T)_{1j}\cdot\det(\mathbf{A}^T(1;j)) \\ &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}\cdot a_{j1}\cdot\det(\mathbf{A}(j;1)) \\ &= \det(\mathbf{A}),\end{aligned}$$

hvor vi i den sidste lighed anvendte Definition 8.1.2. Dette afslutter induktionstrinnet og dermed beviset. □

Afslutningsvis vil vi nævne en særligt vigtig egenskab ved determinanter, nemlig at de opfører sig fint med hensyn til matrixmultiplikation:

Sætning 8.3.3

Lad $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ være givet. Da er $\det(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})\cdot\det(\mathbf{B})$.

Den interesserede læser kan finde en skitse af beviset i slutningen af dette afsnit, men det er ikke obligatorisk læsning. Selvom sætningen ser uskyldig ud, har den en række væsentlige konsekvenser, der alle vil vise sig vigtige for os senere. Vi formulerer dem her som en række korollarer.

Korollar 8.3.4

Lad $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ være givet. Da har $\mathbf{A}$ en invers, hvis og kun hvis $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Bevis. Hvis $\mathbf{A}$ har en invers $\mathbf{A}^{-1}$, så gælder der, at $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_n$. Ved at anvende Sætning 8.3.3 ser vi, at $\det(\mathbf{A})\cdot\det(\mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{I}_n) = 1$. For den sidste lighed benyttede vi os af Proposition 8.1.1. Således gælder der, at $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, da produktet $\det(\mathbf{A})\cdot\det(\mathbf{A}^{-1})$ ellers ville være nul.

Antag omvent, at $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. Hvis vi transformerer $\mathbf{A}$ ved hjælp af en hvilken som helst sekvens af elementære rækkeoperationer til en matrix $\mathbf{B}$ på reduceret trappeform, medfører Korollar 8.2.2 og Sætningerne 8.2.6 og 8.2.7, at $\det(\mathbf{B}) = d\cdot\det(\mathbf{A})$ for en konstant $d \in \mathbb{F}$ forskellig fra nul. Derfor gælder der, at $\det(\mathbf{B}) \neq 0$. Dette betyder specifikt, at $\mathbf{B}$ ikke indeholder en nulrække, da dens determinant ellers ville være nul ifølge Lemma 8.1.3. Derfor må der gælde, at $\mathbf{B} = \mathbf{I}_n$, hvilket medfører, at $\mathbf{A}$ har rang n. Som set i Ligning (7.10) og Korollar 7.3.5 betyder dette, at $\mathbf{A}$ har en invers. □

Korollar 8.3.5

Lad $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ være givet. Da er søjlerne i $\mathbf{A}$ lineært uafhængige, hvis og kun hvis $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Bevis. Dette følger ved at kombinere Sætning 7.1.3, det forrige korollar og Korollar 7.3.5. □

Korollar 8.3.6

Lad $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ være givet. Da er $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, hvis og kun hvis det homogene system af lineære ligninger med koefficientmatricen $\mathbf{A}$ kun har nulvektoren som løsning.

Bevis. Dette følger ved at kombinere Korollarerne 6.4.5, 7.3.5 og 8.3.4. □

Vi vil ikke bevise Sætning 8.3.3 i detaljer, men læseren, der gerne vil vide mere, kan læse resten af dette afsnit og få et godt indtryk af, hvorfor denne sætning samt Sætning 8.3.1 er sande. Resten af dette afsnit kan springes over ved første læsning. Hvis en læser er villig til at acceptere udsagnene i Sætningerne 8.3.1 og 8.3.3 uden bevis, kan de fortsætte til næste kapitel.

Nøglen til at forstå, hvorfor Sætning 8.3.1 er sand, er følgende:

Lemma 8.3.7

Lad $f : \mathbb{F}^{n \times n} \to \mathbb{F}$ være en funktion, der opfylder de følgende to betingelser:

(i) $f(\mathbf{A}) = 0$ for alle kvadratiske matricer $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$, der har to identiske rækker.

(ii) For alle matricer $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ og $\mathbf{C}$ som angivet i Sætning 8.2.1, gælder der, at $f(\mathbf{C}) = c \cdot f(\mathbf{A}) + f(\mathbf{B})$.

Da er $f(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}) \cdot f(\mathbf{I}_n)$ for alle $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$.

Bevis. Vi skitserer kun beviset: De to betingelser, som f opfylder, er nok til at udlede præcis, hvordan værdien af f ændrer sig, når en matrix $\mathbf{A}$ ændres ved hjælp af en elementær rækkeoperation. Faktisk kan mange af beviserne i Afsnit 8.2 genbruges. De to givne betingelser er også nok til at udlede, at $f(\mathbf{A}) = 0$ for enhver $\mathbf{A}$, der har en nulrække. Resultatet er derefter, at f opfører sig nøjagtigt som determinanten under elementære rækkeoperationer, og at både f og determinanten har værdien nul for matricer med en nulrække.

Givet en hvilken som helst kvadratisk matrix $\mathbf{A}$ og en sekvens af elementære rækkeoperationer, der transformerer $\mathbf{A}$ til sin reducerede trappeform, som vi kan kalde $\mathbf{B}$, kan man efter transformationen sammenligne værdierne af f og determinanten under disse elementære rækkeoperationer. Resultatet er, at $f(\mathbf{A}) = d \cdot f(\mathbf{B})$ for en konstant $d \in \mathbb{F}$, samt at også $\det(\mathbf{A}) = d \cdot \det(\mathbf{B})$ for *den samme* konstant d. Hvis $\mathbf{A}$ har rang mindre end n, indeholder dens reducerede trappeform $\mathbf{B}$ en nulrække. Men så er $f(\mathbf{B}) = 0$, og $\det(\mathbf{B}) = 0$. Hvis $\mathbf{A}$ har rang n, så er $\mathbf{B} = \mathbf{I}_n$. Således har vi i dette tilfælde, at $f(\mathbf{A}) = d \cdot f(\mathbf{I}_n)$, mens $\det(\mathbf{A}) = d \cdot \det(\mathbf{I}_n) = d \cdot 1 = d$. I alle tilfælde ser vi, at $f(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}) \cdot f(\mathbf{I}_n)$. □

Bemærk, at determinanten, som vi definerede den i Definition 8.1.2, opfylder de to betingelser fra Lemma 8.3.7, se Proposition 8.2.5 og Sætning 8.2.1. For at bevise, at Sætning 8.3.1 er gyldig, skal man vise, at funktionen f, man får ved udvikling af en determinant langs en række eller en søjle, altid har de egenskaber, der er nævnt i Lemma 8.3.7, og at $f(\mathbf{I}_n) = 1$. Dette kan langt hen ad vejen gøres på samme måde, som det vi gjorde for determinanten defineret i Definition 8.1.2.

Lad os slutteligt opridse en skitse af beviset for Sætning 8.3.3:

Bevis. For en skitse af beviset af Sætning 8.3.3 betragter vi funktionen $f : \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}$ defineret ved $f(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ for en vilkårligt valgt $\mathbf{B} \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Ved hjælp af Proposition 8.2.5 og Sætning 8.2.1 viser man først, at f opfylder betingelserne i Lemma 8.3.7. Man kan derefter konkludere, at $f(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}) \cdot f(\mathbf{I}_n)$ for alle $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Men så er $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = f(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}) \cdot f(\mathbf{I}_n) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$. I den sidste lighed udnyttede vi, at $\mathbf{I}_n \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}$. $\square$