Kapitel 4

Polynomier

4.1 Definition af polynomier

I dette kapitel vil vi undersøge en bestemt type af funktioner kaldet polynomier. Polynomier vil blive taget op igen senere, når vi skal behandle differentialligninger, eksempler på vektorrum og egenværdier af en matrix. Vi lægger ud med at definere, hvad et polynomium er.

Definition 4.1.1
Et *polynomium* $p(Z)$ i en variabel Z er et udtryk på formen:

$$p(Z) = a_0 Z^0 + a_1 Z^1 + a_2 Z^2 + \cdots + a_n Z^n, \text{ hvor } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ er et ikke-negativt heltal.}$$

Her betegner symbolerne $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ komplekse tal, der kaldes *koefficienter* i polynomiet $p(Z)$. Udtrykkene $a_0 Z^0, a_1 Z^1, \ldots, a_n Z^n$ kaldes *led* i polynomiet $p(Z)$. Den største i, for hvilken $a_i \neq 0$, kaldes *graden* af $p(Z)$ og betegnes $\deg(p(Z))$. Den tilsvarende koefficient kaldes *den ledende koefficient*. Mængden af alle polynomier i Z med komplekse koefficienter betegnes $\mathbb{C}[Z]$.

Typisk skrives ikke Z^0, og typisk skrives Z i stedet for Z^1. Et polynomium skrives dermed helt simpelt som $p(Z) = a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2 + \cdots + a_n Z^n$. Et polynomium af grad nul kan fortolkes som en konstant a_0 forskellig fra nul, mens et polynomium af grad ét har formen $a_0 + a_1 Z$. Polynomiet, for hvilket alle koefficienter er nul, kaldes *nulpolynomiet* og angives blot med et 0. Det er sædvane at definere graden af nulpolynomiet til at være $-\infty$, minus uendelig.

Per definition bestemmer koefficienterne et polynomium fuldstændigt. Med andre ord: to polynomier $p_1(Z) = a_0 + a_1 Z \cdots + a_n Z^n$ af grad n og $p_2(Z) = b_0 + b_1 Z \cdots + b_m Z^m$ af grad m er ens, hvis og kun hvis $n = m$, og $a_i = b_i$ for alle i. Rækkefølgen af leddene er ikke vigtig. For eksempel er polynomierne $Z^2 + 2Z + 3$, $Z^2 + 3 + 2Z$ og $3 + 2Z + Z^2$ alle det samme polynomium. Notationen $\mathbb{C}[Z]$ for mængden af alle polynomier med koefficienter fra $\mathbb{C}$ benyttes som standard, men symbolet, der angiver variablen, i vores tilfælde Z, varierer fra bog til bog. Vi har her valgt Z, da vi har brugt z for komplekse tal. Andre mængder af polynomier kan opnås ved at erstatte $\mathbb{C}$ med noget andet. For eksempel vil vi ofte benytte $\mathbb{R}[Z]$, der repræsenterer mængden af alle polynomier med koefficienter fra $\mathbb{R}$. Bemærk, at $\mathbb{R}[Z] \subseteq \mathbb{C}[Z]$, da $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Eksempel 4.1.1

Hvilke af følgende udtryk er elementer i mængden $\mathbb{C}[Z]$? Hvis udtrykket er et polynomium, angiv da dets grad og ledende koefficient.

(a) $1 + Z^2$

(b) $Z^{-1} + 1 + Z^3$

(c) i

(d) $\sin(Z) + Z^{12}$

(e) $1 + 2Z + 5Z^{10} + 0Z^{11}$

(f) $1 + Z + Z^{2.5}$

(g) $(1 + Z)^2$

Svar:

(a) $1 + Z^2$ er et polynomium tilhørende $\mathbb{C}[Z]$. Hvis vi vil skrive det på formen $a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2 + \cdots + a_n Z^n$ som i Definition 4.1.1, kan vi skrive det som $1 + 0Z + 1Z^2$. Vi ser dermed, at $n = 2$, $a_0 = a_2 = 1$, og $a_1 = 0$. Fordi $a_2 \neq 0$, er polynomiet af grad 2, mens dets ledende koefficient a_2 er lig med 1.

(b) $Z^{-1} + 1 + Z^3$ er ikke et polynomium fra $\mathbb{C}[Z]$ grundet leddet Z^{-1}. Eksponenterne på Z'erne i et polynomiums led må ikke være negative.

(c) Det komplekse tal i kan fortolkes som et polynomium tilhørende $\mathbb{C}[Z]$. Man vælger $n = 0$ og $a_0 = i$ i Definition 4.1.1. Polynomiet i har derfor grad 0 og ledende koefficient i.

(d) $\sin(Z) + Z^{12}$ er ikke et polynomium grundet leddet $\sin(Z)$.

(e) $1 + 2Z + 5Z^{10} + 0Z^{11}$ er et polynomium tilhørende $\mathbb{C}[Z]$. Leddet med eksponenten 11 kan udelades, da koefficienten for Z^{11} er 0. Den højeste potens af Z med en koefficient forskellig fra nul er derfor 10. Dette betyder, at $\deg(1 + 2Z + 5Z^{10} + 0Z^{11}) = 10$, mens dets ledende koefficient er 5.

(f) $1 + Z + Z^{2.5}$ er ikke et polynomium på grund af leddet $Z^{2.5}$. Eksponenterne på Z'erne skal være naturlige tal.

(g) $(2+Z)^2$ er et polynomium tilhørende $\mathbb{C}[Z]$, selvom det ikke umiddelbart er skrevet på formen som i Definition 4.1.1. Det kan nemlig omskrives til denne form, da $(2+Z)^2 = 4+4Z+Z^2 = 4+4Z+1Z^2$. Vi har, at $\deg((2+Z)^2) = 2$. Den ledende koefficient i $(1+Z)^2$ er 1.

Man kan evaluere et givet polynomium $p(Z) \in \mathbb{C}[Z]$ i ethvert komplekst tal $z \in \mathbb{C}$. Mere præcist, hvis $p(Z) = a_0 + a_1 Z + \cdots + a_n Z^n \in \mathbb{C}[Z]$, og $z \in \mathbb{C}$, så kan vi definere $p(z) = a_0 + a_1 \cdot z + \cdots + a_n \cdot z^n \in \mathbb{C}$. På denne måde giver ethvert polynomium $p(Z) \in \mathbb{C}[Z]$ anledning til en funktion $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, defineret ved $z \mapsto p(z)$. En funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kaldes en *polynomiefunktion*, hvis der findes et polynomium $p(Z) \in \mathbb{C}[Z]$, således at der for alle $z \in \mathbb{C}$ gælder, at $f(z) = p(z)$. Ligeledes kaldes en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en polynomiefunktion, hvis der findes et polynomium $p(Z) \in \mathbb{R}[Z]$, således at der for alle $x \in \mathbb{R}$ gælder, at $f(x) = p(x)$.

To polynomier $p_1(Z) = a_0 + a_1 Z \cdots + a_n Z^n$ og $p_2(Z) = b_0 + b_1 Z \cdots + b_m Z^m$ kan ganges sammed ved at leddene $a_i b_j Z^{i+j}$ for $0 \le i \le n$ og $0 \le j \le m$ lægges sammen. Dette betyder blot, at for at udregne $p_1(Z) \cdot p_2(Z)$ ganges hvert led i $p_1(Z)$ med hvert led i $p_2(Z)$, hvorefter alle de resulterende led lægges sammen. Lad os se på nogle eksempler.

Eksempel 4.1.2

Skriv følgende polynomier på formen angivet i Definition 4.1.1.

(a) $(Z+5) \cdot (Z+6)$.

(b) $(3Z+2) \cdot (3Z-2)$.

(c) $(Z-1) \cdot (Z^2+Z+1)$.

Svar:

(a) $(Z+5) \cdot (Z+6) = Z \cdot (Z+6) + 5 \cdot (Z+6) = Z^2 + 6Z + 5Z + 30 = Z^2 + 11Z + 30$.

(b) $(3Z+2) \cdot (3Z-2) = (3z)^2 - 6Z + 6Z - 2^2 = 9Z^2 - 4$.

(c) I dette eksempel er den eneste forskel fra de to foregående, at der bringes flere led i spil under multiplikationen:

$$\begin{aligned} (Z-1) \cdot (Z^2+Z+1) &= Z \cdot (Z^2+Z+1) - (Z^2+Z+1) \\ &= Z^3 + Z^2 + Z - Z^2 - Z - 1 \\ &= Z^3 - 1. \end{aligned}$$

Bemærk, at hvis et polynomium er et produkt af to andre polynomier, så som $p(Z) = p_1(Z) \cdot p_2(Z)$, så er $\deg p(Z) = \deg p_1(Z) + \deg p_2(Z)$. Med andre ord:

$$p(Z) = p_1(Z) \cdot p_2(Z) \quad \Rightarrow \quad \deg p(Z) = \deg p_1(Z) + \deg p_2(Z). \tag{4.1}$$

Hvis $p(Z) \in \mathbb{C}[Z]$ er et polynomium, så kaldes ligningen $p(z) = 0$ en *polynomiumsligning*. Løsninger til en polynomiumsligning tildeles et særligt navn:

Definition 4.1.2
Lad $p(Z) \in \mathbb{C}[Z]$ være et polynomium. Et komplekst tal $\lambda \in \mathbb{C}$ kaldes en *rod* i $p(Z)$, hvis $p(\lambda) = 0$.

Bemærk, at ifølge definitionen er et komplekst tal en rod i et polynomium $p(Z)$, hvis og kun hvis det er en løsning til polynomiumsligningen $p(z) = 0$.

4.2 Polynomier af anden grad med reelle koefficienter

Vi vil i dette afsnit vise en vigtig anvendelse af de komplekse tal, når vi skal bestemme rødderne i et polynomium $p(Z) \in \mathbb{R}[Z]$ af anden grad. Bemærk, at vi antager, at $p(Z) \in \mathbb{R}[Z]$, så polynomiet $p(Z)$ har reelle koefficienter. Et sådant polynomium $p(Z)$ kan derfor skrives på formen

$$p(Z) = aZ^2 + bZ + c,$$

hvor $a, b, c \in \mathbb{R}$, og $a \neq 0$. For at bestemme dets rødder skal vi løse polynomiumsligningen $az^2 + bz + c = 0$. Nu gælder følgende:

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = 0 &\Leftrightarrow 4a^2z^2 + 4abz + 4ac = 0 \\ &\Leftrightarrow (2az)^2 + 2(2az)b + b^2 = b^2 - 4ac \\ &\Leftrightarrow (2az + b)^2 = b^2 - 4ac. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Udtrykket $b^2 - 4ac$ kaldes diskriminanten for polynomiet $aZ^2 + bZ + c$. Vi vil betegne det ved D. Fra Ligning (4.2) følger det, at for at bestemme rødderne i polynomiet $aZ^2 + bZ + c$ skal vi tage kvadratroden af dets diskriminant D. Hvis $D \geq 0$, kan man benytte den sædvanlige kvadratrod, men nu vil vi definere kvadratroden af ethvert reelt tal:

Definition 4.2.1
Lad D være et reelt tal. Da definerer vi

$$\sqrt{D} = \begin{cases} \sqrt{D} & \text{hvis } D \geq 0, \\ i\sqrt{|D|} & \text{hvis } D < 0. \end{cases}$$

Hvis $D \geq 0$, så er $\sqrt{D}$ netop, hvad vi er vant til, og der gælder, at $\sqrt{D}^2 = D$. Hvis $D < 0$, gælder der, at $\sqrt{D}^2 = (i\sqrt{|D|})^2 = i^2\sqrt{|D|}^2 = (-1)|D| = D$. Derfor gælder der for alle reelle tal D, at $\sqrt{D}^2 = D$. Dette er præcis den egenskab, vi gerne vil have, at kvadratrodsymbolet skal have. Desuden kan alle løsninger til ligningen $z^2 = D$ nu angives: de er $z = \sqrt{D}$ og $z = -\sqrt{D}$. Senere, i Sætning 4.4.1, vil vi endda kunne beskrive alle løsningerne til ligninger af formen $z^n = w$ for ethvert $n \in \mathbb{N}$ og $w \in \mathbb{C}$. Vi vender nu tilbage til bestemmelsen af rødderne i polynomiet $p(z) = az^2 + bz + c$. Ved hjælp af den udvidede kvadratrodsdefinition samt Ligning (4.2) får vi, at

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = 0 &\Leftrightarrow (2az+b)^2 = b^2 - 4ac \\ &\Leftrightarrow (2az+b) = \sqrt{b^2-4ac} \quad \vee \quad (2az+b) = -\sqrt{b^2-4ac} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \vee \quad z = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Vi opnår den velkendte formel til at løse en ligning af anden grad, men kvadratroden af diskriminanten er nu også defineret, hvis diskriminanten er negativ. Faktisk har vi nu vist følgende sætning.

Sætning 4.2.1

Polynomiet $p(Z) = aZ^2 + bZ + c \in \mathbb{R}[Z]$ med $a \neq 0$, har følgende rødder i $\mathbb{C}$:

$$\frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \text{ og } \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}, \text{ hvor } D = b^2 - 4ac.$$

For at være mere præcis har polynomiet

(i) to reelle rødder $z = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, hvis $D > 0$,

(ii) en reel rod $z = \dfrac{-b}{2a}$, hvis $D = 0$,

(iii) to ikke-reelle rødder $z = \dfrac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a}$, hvis $D < 0$.

Beskrivelsen af rødderne i Sætning 4.2.1 er algoritmisk i sin natur. Lad os skrive noget pseudo-kode og opstille algoritmen:

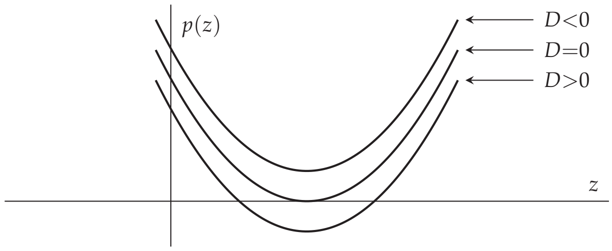
Algoritme 6 for udregning af rødderne i $p(Z) \in \mathbb{R}[Z]$ af anden grad.

Input: $p(Z) \in \mathbb{R}[Z]$ med $\deg(p(Z)) = 2$

1: $a \leftarrow$ koefficienten af Z^2 i $p(Z)$
2: $b \leftarrow$ koefficienten af Z^1 i $p(Z)$
3: $c \leftarrow$ koefficienten af Z^0 i $p(Z)$
4: $D \leftarrow b^2 - 4ac$
5: **if** $D \geq 0$ **then**
6: **return** $\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ og $\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$
7: **else**
8: **return** $\dfrac{-b+i\sqrt{|D|}}{2a}$ og $\dfrac{-b-i\sqrt{|D|}}{2a}$

I Figur 4.1 har vi tegnet graferne for nogle andengradspolynomier. Reelle rødder i et andengradspolynomium svarer til skæringspunkter mellem x-aksen og dets graf. Hvis der ikke er nogen skæringspunkter, har polynomiet ikke reelle rødder men komplekse rødder.

Hvis $D = b^2 - 4ac = 0$, har polynomiumsligningen $az^2 + bz + c = 0$ én løsning, og vi siger i dette tilfælde, at polynomiet har en *dobbeltrod*, eller en rod med multiplicitet to. Hvis $D \neq 0$, siger man, at rødderne hver især har multiplicitet én. Vi ser, at ethvert polynomium af anden grad har to rødder, hvis rødderne tælles med deres multipliciteter. Vi vender tilbage til rødder og multipliciteter i flere detaljer i Afsnit 4.6. Grafen for en polynomiefunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, der er dannet af et andengradspolynomium fra $\mathbb{R}[Z]$, skærer den vandrette akse to gange, hvis $D > 0$, én gang, hvis $D = 0$, og slet ikke, hvis $D < 0$. Se Figur 4.1 for en illustration.



Figur 4.1: Et polynomium $p(Z) \in \mathbb{R}[Z]$ af anden grad har to reelle rødder, hvis $D > 0$, en dobbeltrod, hvis $D = 0$, og to komplekse, ikke-reelle rødder, hvis $D < 0$.

Eksempel 4.2.1

Bestem alle komplekse rødder i polynomiet $2Z^2 - 4Z + 10 = 0$.
Svar: Diskriminanten tilhørende polynomiet $2Z^2 - 4Z + 10$ er

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 10 = -64.$$

Ifølge Definition 4.2.1 får vi så, at

$$\sqrt{D} = \sqrt{-64} = i\sqrt{64} = 8i.$$

Derfor har polynomiumsligningen $2z^2 - 4z + 10 = 0$ to ikke-reelle rødder, nemlig

$$z = \frac{-(-4) + 8i}{2 \cdot 2} = 1 + 2i \quad \vee \quad z = \frac{-(-4) - 8i}{2 \cdot 2} = 1 - 2i.$$

Selvom Sætning 4.2.1 garanterer, at $1 + 2i$ og $1 - 2i$ er rødderne i polynomiet $2Z^2 - 4Z + 10$, så lad os alligevel eftertjekke ved håndregning, at $1 + 2i$ er en rod:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (1+2i)^2 - 4 \cdot (1+2i) + 10 &= 2 \cdot (1^2 + 4i + (2i)^2) - 4 \cdot (1+2i) + 10 \\ &= 2 \cdot (1 - 4 + 4i) - 4 \cdot (1+2i) + 10 \\ &= 2 \cdot (-3 + 4i) - 4 \cdot (1+2i) + 10 \\ &= (-6 + 8i) - (4 + 8i) + 10 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Vi har nu vist, at $1 + 2i$ ganske rigtigt og præcis som teorien forudsiger, er en rod i $2Z^2 - 4Z + 10$.

4.3 Polynomier med reelle koefficienter

I det foregående afsnit studerede vi polynomier af anden grad med reelle koefficienter. Mange af de polynomier, vi vil støde på senere, vil have reelle koefficienter. I dette afsnit vil vi derfor samle fakta om sådanne polynomier. Kompleks konjugering som introduceret i Definition 3.2.3 vil spille en vigtig rolle. Kompleks konjugering har flere gode egenskaber. Vi oplister nogle af disse i følgende lemma.

Lemma 4.3.1

Lad $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ være komplekse tal. Da gælder der, at

(i) $\overline{\overline{z}} = z$,

(ii) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$,

(iii) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$,

(iv) $\overline{1/z} = 1/\overline{z}$ forudsat, at $z \neq 0$,

(v) $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$, hvor $n \in \mathbb{Z}$.

Bevis. Lad os bevise lemmaets andet og tredje punkt. Beviserne af de resterende punkter overlades til læseren. Om en sum af to komplekse tal $z_1 = a + bi$ og $z_2 = c + di$ på rektangulær form gælder der, at

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a+c) + (b+d)i} = (a+c) - (b+d)i = (a - bi) + (c - di) = \overline{z_1} + \overline{z_2}.$$

Om et produkt af to komplekse tal $z_1 = a + bi$ og $z_2 = c + di$ på rektangulær form gælder der $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$. Derfor har vi

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = (ac - bd) - (ad + bc)i.$$

Samtidig har vi følgende:

$$\begin{aligned}
\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} &= (a - bi) \cdot (c - di) \\
&= ac - adi - bci + (-b) \cdot (-d)i^2 \\
&= ac - (ad + bc)i + bd \cdot (-1) \\
&= ac - bd - (ad + bc)i.
\end{aligned}$$

Dette viser, at $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$. □

Eksempel 4.3.1

Udtryk følgende komplekse tal på rektangulær form.

(a) $\overline{-3 + 6i}$

(b) $\overline{\pi}$

(c) $\overline{-97i}$

Svar:

(a) Jævnfør definitionen af den komplekst konjugerede har vi $\overline{-3+6i} = -3-6i$.

(b) $\overline{\pi} = \overline{\pi + 0i} = \pi - 0i = \pi$. Dette illustrerer det mere generelle faktum, at $\overline{z} = z$, hvis z er et reelt tal.

(c) $\overline{-97i} = -(-97i) = 97i$. Det viser sig mere generelt, at $\overline{z} = -z$ for alle rent imaginære tal.

Kompleks konjugering fungerer også fint sammen med den komplekse eksponentialfunktion.

Lemma 4.3.2

Lad $z \in \mathbb{C}$ være et komplekst tal og $\alpha \in \mathbb{R}$ et reelt tal. Der gælder, at

(i) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$,

(ii) $\overline{e^{i\alpha}} = e^{-i\alpha}$,

(iii) $\overline{z} = |z|e^{-i\arg(z)}$.

Bevis. Vi beviser her de første to dele af lemmaet. Den tredje del af lemmaet er illustreret i Figur 4.2. Antag, at $z = a + bi$ er z's rektangulære form. Jævnfør definitionen af den komplekse eksponentialfunktion får vi

$$\overline{e^z} = \overline{e^a\cos(b) + e^a\sin(b)i} = e^a\cos(b) - e^a\sin(b)i$$

$$= e^a\cos(-b) + e^a\sin(-b)i = e^{a-bi} = e^{\overline{z}}.$$

Hvis $z = i\alpha$ (med $\alpha \in \mathbb{R}$), opnår vi særtilfældet

$$\overline{e^{i\alpha}} = e^{\overline{i\alpha}} = e^{-i\alpha}.$$

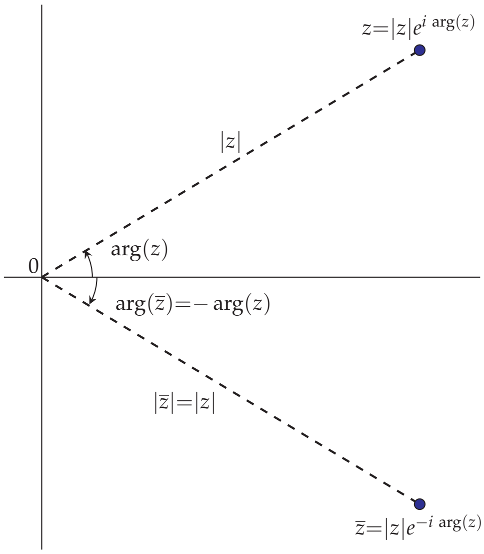
□

Eksempel 4.3.2

Skriv det komplekse tal $\overline{5e^{i\pi/3}}$ på polær form.

Svar:

$\overline{5e^{i\pi/3}} = \overline{5}\,\overline{e^{i\pi/3}} = 5e^{-i\pi/3}$. Dette illustrerer den tredje del af det foregående lemma, som siger, at $\overline{z} = |z|e^{-i\arg(z)}$.



Figur 4.2: Et komplekst tal z og dets komplekse konjugerede $\overline{z}$ på polær form.

Lad os nu vende tilbage til vores diskussion af polynomier med reelle koefficienter. Grunden til, at vi genopfriskede kompleks konjugering her, er følgende egenskab:

Lemma 4.3.3

Lad $p(Z) \in \mathbb{R}[Z]$ være et polynomium med reelle koefficienter, og lad $\lambda \in \mathbb{C}$ være en rod i $p(Z)$. Da er det komplekse tal $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}$ også en rod i $p(Z)$.

Bevis. Lad os opskrive $p(Z) = a_n Z^n + \cdots + a_1 Z + a_0$. Da $p(Z)$ har reelle koefficienter, gælder der, at $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$. Det er givet, at $\lambda \in \mathbb{C}$ er en rod i $p(Z)$, og derfor gælder der, at

$$0 = a_n \lambda^n + \cdots + a_1 \lambda + a_0.$$

Vi vil nu vise, at $\overline{\lambda}$ også er en rod i $p(Z)$. Først udføres kompleks konjugering af hver side af ligningen, hvilket giver

$$0 = \overline{a_n \lambda^n + \cdots + a_1 \lambda + a_0},$$

hvorefter vi ved anvendelse af egenskaberne givet i Lemma 4.3.1 herpå, får:

$$\begin{aligned}
0 &= \overline{a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} \cdots + a_1 \lambda + a_0} \\
&= \overline{a_n \lambda^n} + \overline{a_{n-1}\lambda^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1 \lambda} + \overline{a_0} \\
&= \overline{a_n}\,\overline{\lambda^n} + \overline{a_{n-1}}\,\overline{\lambda^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1}\,\overline{\lambda} + \overline{a_0} \\
&= \overline{a_n}(\overline{\lambda})^n + \overline{a_{n-1}}(\overline{\lambda})^{n-1} + \cdots + \overline{a_1}\,\overline{\lambda} + \overline{a_0} \\
&= a_n(\overline{\lambda})^n + a_{n-1}(\overline{\lambda})^{n-1} + \cdots + a_1\overline{\lambda} + a_0 \\
&= p(\overline{\lambda})
\end{aligned}$$

I den femte lighed har vi benyttet os af, at koefficienterne i polynomiet $p(Z)$ er reelle tal, så $\overline{a_j} = a_j$ for alle j mellem 0 og n. Vi har nu vist, at $p(\overline{\lambda}) = 0$, og derfor kan vi konkludere, at også $\overline{\lambda}$ er en rod i polynomiet $p(Z)$. □

Lemma 4.3.3 har følgende konsekvens: ikke-reelle rødder i et polynomium med reelle koefficienter forekommer i par. Tag for eksempel polynomiet $2Z^2 - 4Z + 10$. Vi så i Eksempel 4.2.1, at en af dets rødder er $1 + 2i$. Lemma 4.3.3 medfører, at det komplekse tal $1 - 2i$ dermed også er en rod i $2Z^2 - 4Z + 10$. Eksempel 4.2.1 viste, at dette rent faktisk er tilfældet.

4.4 Binomier

I dette afsnit behandler vi polynomier på formen $Z^n - w$ for et naturligt tal $n \in \mathbb{N}$ og et komplekst tal $w \in \mathbb{C}$ forskelligt fra 0. Tallet n er graden af polynomiet $Z^n - w$. Fordi et polynomium på formen $Z^n - w$ kun består af to led, nemlig Z^n og $-w$, kaldes det typisk et *binomium*. Den tilsvarende ligning $z^n = w$ kaldes en *binom ligning*. Vi vil i det følgende give en nøjagtig beskrivelse af alle rødder i et binomium $Z^n - w \in \mathbb{C}[Z]$. Vi vil altså bestemme alle $z \in \mathbb{C}$, der opfylder ligningen $z^n = w$. Det viser sig, at den polære form af det komplekse tal w er til stor hjælp.

Sætning 4.4.1
Lad $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Ligningen $z^n = w$ har præcis n forskellige løsninger, nemlig:

$$z = \sqrt[n]{|w|}e^{i(\frac{\arg(w)}{n} + p\frac{2\pi}{n})}, \ p \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Her betegner $\sqrt[n]{|w|}$ det entydige, positive, reelle tal, der opfylder $\left(\sqrt[n]{|w|}\right)^n = |w|$.

Bevis. Ideen i dette bevis er at forsøge at bestemme alle løsninger z til ligningen $z^n = w$ på polær form. Derfor skriver vi $z = |z|e^{iu}$, og vi vil forsøge at bestemme de mulige værdier af $|z|$ og u, således at $z^n = |w|e^{i\alpha}$. Først og fremmest har vi $z^n = (|z|e^{iu})^n = |z|^n e^{inu}$, og dette udtryk skal være lig med $|w|e^{i\alpha}$. Dette gælder, hvis og kun hvis $|w| = |z|^n$, og $e^{inu} = e^{i\alpha}$, eller med andre ord hvis og kun hvis $|w| = |z|^n$, og $e^{i(nu-\alpha)} = 1$. Ligningen $|w| = |z|^n$ har præcis én løsning for $|z| \in \mathbb{R}_{>0}$, nemlig $|z| = \sqrt[n]{|w|}$, mens ligningen $e^{i(nu-\alpha)} = 1$ ifølge Lemma 3.6.1 er opfyldt, hvis og kun hvis $nu - \alpha = \arg(1)$. De mulige argumenter for 1 er ethvert multiplum af 2π, det vil sige $\arg(1) = p2\pi$ for ethvert heltal $p \in \mathbb{Z}$.

Alle løsninger til $z^n = w$ er derfor på formen $z = \sqrt[n]{|w|}e^{i(\frac{\alpha}{n} + p\frac{2\pi}{n})}$, hvor $p \in \mathbb{Z}$. I princippet har vi en løsning for ethvert valg af $p \in \mathbb{Z}$, men når p gennemløber mængden $\{0, \dots, n-1\}$, har vi allerede opnået alle de muligheder, der udgør forskellige løsninger z. □

Når de tegnes i det komplekse talplan, danner løsningerne til ligningen $z^n = w$ hjørnerne af en regulær n-kant med centrum i 0. Lad os illustrere dette i et eksempel.

Eksempel 4.4.1

I dette eksempel vil vi bestemme alle rødder i polynomiet $Z^4 + 8 - i8\sqrt{3}$ og skrive dem på rektangulær form.

Svar: Vi kan benytte Sætning 4.4.1 med $n = 4$ og $w = -(8 - i8\sqrt{3})$. Først opskrives det komplekse tal $-(8 - i8\sqrt{3}) = -8 + i8\sqrt{3}$ på polær form. Vi udregner

$$|-8 + i8\sqrt{3}| = \sqrt{(-8)^2 + (8\sqrt{3})^2} = 16$$

og

$$\arg(-8 + i8\sqrt{3}) = \arctan(8\sqrt{3}/(-8)) + \pi = 2\pi/3,$$

og derfor får vi, at $-8 + i8\sqrt{3} = 16e^{i2\pi/3}$, hvilket er den ønskede polære form. Ifølge Sætning 4.4.1 er alle løsningerne til $z^4 = -8 + i8\sqrt{3}$ givet ved:

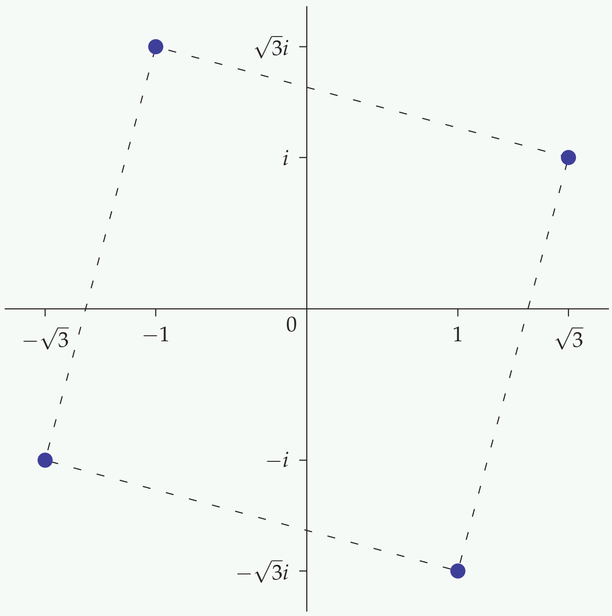
$$z = \sqrt[4]{16}e^{i\left(\frac{2\pi}{3\cdot 4} + p\frac{2\pi}{4}\right)}, \text{hvor } p \text{ kan vælges frit fra mængden } \{0, 1, 2, 3\}, \text{ så}$$

$$z = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \quad \vee \quad z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad \vee \quad z = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} \quad \vee \quad z = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}.$$

Vi skal opskrive disse rødder på rektangulær form. Ved hjælp af formlen $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$ fås:

$$z = \sqrt{3} + i \quad \vee \quad z = -1 + i\sqrt{3} \quad \vee \quad z = -\sqrt{3} - i \quad \vee \quad z = 1 - i\sqrt{3}.$$

Som nævnt i en bemærkning efter Sætning 4.4.1 udgør disse løsninger hjørnerne af en regulær 4-kant (det vil sige, et kvadrat) med centrum i origo. Dette ses i følgende figur.



Polynomier fra $\mathbb{C}[Z]$ af grad to

I Afsnit 4.2 så vi, hvordan man bestemmer rødderne i polynomier fra $\mathbb{R}[Z]$ af grad to. Vi ved nu også, hvordan man bestemmer rødderne i binome polynomier, og vi er dermed klar til at bestemme rødderne i polynomier af grad to fra $\mathbb{C}[Z]$ uden meget ekstra arbejde. Den vigtigste observation er, at for ethvert polynomium $aZ^2 + bZ + c \in \mathbb{C}[Z]$, hvor $a \neq 0$, er Ligning (4.3) stadig gyldig. Derfor har vi $az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow (2az + b)^2 = b^2 - 4ac$. Vi ved fra Sætning 4.4.1, at ligningen $s^2 = b^2 - 4ac$ har præcis to løsninger, som vi kan kalde s og $se^{i\pi} = -s$. Vi har dermed $az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow 2az + b = s \vee 2az + b = -s$. Ved at løse for z får vi derefter følgende resultat:

Sætning 4.4.2

Lad $p(Z) = aZ^2 + bZ + c \in \mathbb{C}[Z]$ være et polynomium af grad to. Yderligere, lad $s \in \mathbb{C}$ være en løsning til den binome ligning $s^2 = b^2 - 4ac$. Da har $p(Z)$ netop følgende rødder:

$$\frac{-b+s}{2a} \text{ og } \frac{-b-s}{2a}.$$

Eksempel 4.4.2

Lad os som et eksempel bestemme rødderne i polynomiet $Z^2 + 2Z + 1 - i$.

Svar: Diskriminanten tilhørende polynomiet $Z^2 + 2Z + 1 - i$ er lig med $2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (1 - i) = 4i$. Derfor skal vi først løse den binome ligning $s^2 = 4i$. Vi har $|4i| = 4$ og $\mathrm{Arg}(4i) = \pi/2$. Ved hjælp af Sætning 4.4.1, ser vi, at ligningen $s^2 = 4i$ har løsningerne

$$2 \cdot e^{\pi/4\, i} = 2 \cdot (\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4)) = 2 \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i) = \sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$$

og

$$2 \cdot e^{(\pi/4+\pi)\, i} = 2 \cdot (\cos(5\pi/4) + i \sin(5\pi/4)) = 2 \cdot (-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\, i.$$

Derfor får vi ved hjælp af Sætning 4.4.2 rødderne i polynomiet $Z^2 + Z + 1 - i$ til at være

$$\frac{-2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \quad \text{og} \quad \frac{-2 - \sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i.$$

4.5 Divisionsalgoritmen

I det foregående afsnit så vi, hvordan man bestemmer rødderne i visse typer af polynomier. For at studere røddernes opførsel i mere generelle polynomier begynder vi med følgende observation:

Lemma 4.5.1

Lad $p(Z) \in \mathbb{C}[Z]$ være et polynomium, og antag, at $p(Z) = p_1(Z) \cdot p_2(Z)$ for to polynomier $p_1(Z), p_2(Z) \in \mathbb{C}[Z]$. Yderligere, lad $\lambda \in \mathbb{C}$. Da er λ en rod i $p(Z)$, hvis og kun hvis λ er en rod i $p_1(Z)$ eller i $p_2(Z)$.

Lad os, før vi beviser dette lemma, relatere påstanden i lemmaet til udsagnslogikken fra Kapitel 1 for at tydeliggøre, hvad påstanden siger. En påstand som

"λ er en rod i $p(Z)$, hvis og kun hvis λ er en rod i $p_1(Z)$ eller i $p_2(Z)$"

i en matematisk tekst er blot en måde at formulere et udsagn fra udsagnslogikken på i mere almindeligt sprog. Omformulerer vi til begreber fra udsagnslogikken, opnår vi udsagnet

$$\lambda \text{ er en rod i } p(Z) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \text{ er en rod i } p_1(Z) \vee \lambda \text{ er en rod i } p_2(Z).$$

Vi kan endda gå endnu videre og fjerne alle ord:

$$p(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_1(\lambda) = 0 \vee p_2(\lambda) = 0.$$

Det er en god vane at sikre sig, at man forstår, hvad et matematisk udsagn nøjagtigt betyder, hvis det formuleres i almindeligt sprog. I dette tilfælde er det for eksempel muligt, at λ er en rod i både $p_1(Z)$ og $p_2(Z)$, selvom "eller" ofte benyttes i betydningen "enten den ene eller den anden, men ikke begge". I matematiske tekster har "eller" typisk samme betydning som "$\vee$". Med dette in mente vil vi fortsætte til beviset for lemmaet:

Bevis. Tallet λ er en rod i $p(Z)$, hvis og kun hvis $p(\lambda) = 0$. Da $p(Z) = p_1(Z)p_2(Z)$, er dette ækvivalent med at sige, at $p_1(\lambda)p_2(\lambda) = 0$, og derfor ækvivalent med udsagnet, at $p_1(\lambda) = 0 \vee p_2(\lambda) = 0$. Dette udsagn er logisk ækvivalent med at sige, at λ er en rod i $p_1(Z)$ eller i $p_2(Z)$. □

Ønsker man at bestemme alle rødder i et polynomium, antyder ovenstående lemma, at det altid er en god idé at prøve at skrive polynomiet som et produkt af polynomier af lavere grad. Hvis $p(Z) = p_1(Z) \cdot p_2(Z)$ som i det foregående lemma, siges $p_1(Z)$ og $p_2(Z)$ at være *faktorer* i polynomiet $p(Z)$. Det er derfor nyttigt at have en algoritme, der gør det muligt at afgøre, om et givet polynomium $p_1(Z) \in \mathbb{C}[Z]$ er en faktor i et givet andet polynomium $p(Z) \in \mathbb{C}[Z]$. Ligning (4.1) er her til en vis hjælp, da den medfører, at $p(Z) = p_1(Z) \cdot p_2(Z)$ kun kan være sandt, hvis $\deg p(Z) = \deg p_1(Z) + \deg p_2(Z)$. Specifikt kan $p_1(Z)$ ikke være en faktor i $p(Z)$, hvis $\deg p_1(Z) > \deg p(Z)$. Men dette efterlader stadig tilfældet $\deg p_1(Z) \leq \deg p(Z)$ åbent. Før vi opstiller algoritmen, der løser problemet i sin helhed, vil vi først se på et par eksempler.

Eksempel 4.5.1

(a) Afgør, om polynomiet $Z+3$ er en faktor i polynomiet $2Z^2+3Z-9$.

(b) Afgør, om polynomiet $Z+4$ er en faktor i polynomiet $3Z^3+2Z+1$.

(c) Afgør, om polynomiet $2Z^2+Z+3$ er en faktor i polynomiet $6Z^4+3Z^3+19Z^2+5Z+15$.

Svar:

(a) Vi vil forsøge at bestemme et polynomium $q(Z) \in \mathbb{C}[Z]$, således at $(Z+3)\cdot q(Z) = 2Z^2+3Z-9$. Hvis et sådant $q(Z)$ findes, skal det have graden 1 på grund af Ligning (4.1). Hvis et $q(Z)$ findes, skal det derfor være af formen $q(Z) = b_1 Z + b_0$, hvor $b_1, b_0 \in \mathbb{C}$. Vi prøver først at bestemme b_1. Inden vi påbegynder en reducering af produktet $(Z+3)\cdot(b_1 Z + b_0)$, kan vi med det samme se, at den højeste eksponent på Z i produktet er 2, og at koefficienten af Z^2 i produktet er b_1. Dette betyder, at $(Z+3)\cdot(b_1 Z+b_0) = b_1 Z^2 +$ led af grad mindre end 2. Da der allerede gælder, at $(Z+3)\cdot(b_1 Z+b_0) = 2Z^2+3Z-9$, har vi dermed, at b_1 skal være 2. Nu hvor vi ved, at $b_1 = 2$, vil vi bestemme b_0. På den ene side skal $(Z+3)\cdot(2Z+b_0) = 2Z^2+3Z-9$ være opfyldt, men på den anden side kan vi skrive $(Z+3)\cdot(2Z+b_0) = (Z+3)\cdot 2Z + (Z+3)\cdot b_0$. Derfor kan vi konkludere, at

$$(Z+3)\cdot b_0 = 2Z^2+3Z-9-(Z+3)\cdot 2Z = -3Z-9. \tag{4.4}$$

Den vigtige observation her er, at vi tidligere har valgt b_1 på en sådan måde, at Z^2-leddet i Ligning (4.4) er væk. Ved at se på koefficienterne af Z, konkluderer vi, at $b_0 = -3$. Vi har vist implikationen $(Z+3)\cdot q(Z) = 2Z^2+3Z-9 \Rightarrow q(Z) = 2Z-3$. En direkte kontrol verificerer, at det faktisk er tilfældet, at $2Z^2+3Z-9 = (Z+3)\cdot(2Z-3)$. Vi kan konkludere, at $Z+3$ ganske rigtigt er en faktor i $2Z^2+3Z-9$. Da -3 er roden i $Z+3$, medfører Lemma 4.5.1, at -3 også er rod i polynomiet $2Z^2+3Z-9$. Og ganske rigtigt har vi $2\cdot(-3)^2+3\cdot(-3)-9 = 0$.

Der findes en mere bekvem måde at opskrive de beregninger, vi netop har udført, på. Det første trin var at udregne b_1 og trække $b_1\cdot(Z+3)$ fra $2Z^2+3Z-9$:

$$\begin{array}{r|l|l} \underline{Z+3} & 2Z^2+3Z-9 & \underline{2Z} \\ & \underline{2Z^2+6Z} & \\ & -3Z-9 & \end{array}$$

Den første linje indeholder de polynomier, vi startede med, nemlig $Z+3$ og $2Z^2+3Z-9$, samt alle led i $q(Z)$, som vi fandt frem til i første trin. Den anden linje består af det multiplum af $Z+3$, som vi trak fra $2Z^2+3Z-9$ i Ligning (4.4). Den tredje linje angiver udtrykket $2Z^2+3Z-9-2Z\cdot(Z+3)$ før vores reduceringer. Vi kom også frem til dette i højresiden af Ligning (4.4). Det næste trin var at bestemme b_0. Vi kom frem til, at

$b_0 = -3$, og kan opdatere ovenstående skema som følger:

$$
\begin{array}{r|rl|l}
Z+3 & 2Z^2+3Z-9 & & 2Z-3 \\
\hline
 & 2Z^2+6Z & & \\
\cline{2-2}
 & -3Z-9 & & \\
 & -3Z-9 & & \\
\cline{2-2}
 & 0 & &
\end{array}
$$

Dette betyder blot, at $2Z^2 + 3Z - 9 - (Z+3) \cdot (2Z-3) = 0$. Dette nul i højresiden kommer fra den sidste linje i ovenstående skema. Konklusionen er derfor, at $Z+3$ er en faktor i polynomiet $2Z^2 + 3Z - 9$. Vi kan endda skrive faktoriseringen ned, da vi har vist, at $2Z^2 + 3Z - 9 = (Z+3) \cdot (2Z-3)$.

(b) Denne gang skal vi undersøge, om polynomiet $Z+4$ er en faktor i polynomiet $3Z^3 + 2Z + 1$. Vi prøver at bestemme et polynomium $q(Z)$, således at $(Z+4) \cdot q(Z) = 3Z^3 + 2Z + 1$. Vi ser, at $q(Z)$ skal have graden 2, det vil sige $q(Z) = b_2 Z^2 + b_1 Z + b_0$, og vi vil bestemme dets tre koefficienter. Fra leddet med den højeste eksponent på Z ser vi, at $b_2 = 3$. Lad os denne gang benytte den skematiske procedure som beskrevet i første del af dette eksempel fra start af. Først får vi:

$$
\begin{array}{r|r|l}
Z+4 & 3Z^3 \qquad\quad +2Z+1 & 3Z^2 \\
\hline
 & 3Z^3+12Z^2 \qquad\qquad & \\
\cline{2-2}
 & -12Z^2+2Z+1 &
\end{array}
$$

Nu kan vi se, at koefficienten af Z i $q(Z)$ skal være -12, og vi får:

$$
\begin{array}{r|r|l}
Z+4 & 3Z^3 \qquad\quad +\ 2Z+1 & 3Z^2-12Z \\
\hline
 & 3Z^3+12Z^2 \qquad\qquad & \\
\cline{2-2}
 & -12Z^2+\ 2Z+1 & \\
 & -12Z^2-48Z \qquad & \\
\cline{2-2}
 & 50Z+1 &
\end{array}
$$

Vi kan nu aflæse, at konstantleddet b_0 i $q(Z)$ skal være 50, og vi får:

$$
\begin{array}{r|r|l}
Z+4 & 3Z^3 \qquad\quad +\ 2Z+\ \ 1 & 3Z^2-12Z+50 \\
\hline
 & 3Z^3+12Z^2 \qquad\qquad & \\
\cline{2-2}
 & -12Z^2+\ 2Z+\ \ 1 & \\
 & -12Z^2-48Z \qquad & \\
\cline{2-2}
 & 50Z+\ \ 1 & \\
 & 50Z+200 & \\
\cline{2-2}
 & -199 &
\end{array}
$$

Denne gang får vi ikke et nul i den sidste linje. Hvad ovenstående skema faktisk viser, er, at $3Z^3 + 2Z + 1 - (Z + 4) \cdot (3Z^2 - 12Z + 50) = -199$. Dette betyder, at $Z + 4$ ikke kan være en faktor i $3Z^3 + 2Z + 1$, da $Z + 4$ så også ville være en faktor i $3Z^3 + 2Z + 1 - (Z + 4) \cdot (3Z^2 - 12Z + 50) = -199$. Dette er umuligt, da $\deg(Z + 4) = 1 > 0 = \deg(-199)$. Bemærk, at -4 ikke er rod i polynomiet $3Z^3 + 2Z + 1$, da $3 \cdot (-4)^3 + 2 \cdot (-4) + 1 = -199$.

(c) Vi angiver kun den fuldendte skematiske procedure denne gang:

$$
\begin{array}{r|l|l}
2Z^2+Z+3 & 6Z^4+3Z^3+19Z^2+5Z+15 & 3Z^2+5 \\
 & 6Z^4+3Z^3+\ \ 9Z^2 & \\
\hline
 & \qquad\qquad 10Z^2+5Z+15 & \\
 & \qquad\qquad 10Z^2+5Z+15 & \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Konklusionen er, at $6Z^4 + 3Z^3 + 19Z^2 + 5Z + 15 - (2Z^2 + Z + 3) \cdot (3Z^2 + 5) = 0$ og derfor, at $6Z^4 + 3Z^3 + 19Z^2 + 5Z + 15 = (2Z^2 + Z + 3) \cdot (3Z^2 + 5)$. Derfor er $2Z^2 + Z + 3$ en faktor i polynomiet $6Z^4 + 3Z^3 + 19Z^2 + 5Z + 15$.

Algoritmen beskrevet i ovenstående eksempler kaldes *polynomisk division* eller *divisionsalgoritmen* eller af og til også *lang division*. Lad os beskrive den i sin fulde, generelle form.

Der er givet to polynomier $p(Z), d(Z) \in \mathbb{C}[Z]$ som input, hvor $d(Z)$ ikke er nulpolynomiet. Vi ønsker at bestemme to polynomier $q(Z)$ og $r(Z)$ tilhørende $\mathbb{C}[Z]$, således at:

(i) $p(Z) = d(Z)q(Z) + r(Z)$.

(ii) $r(Z) = 0 \quad \vee \quad deg(r(z)) < \deg(d(z))$.

Polynomiet $q(Z)$, som vi forsøger at finde frem til, kaldes *kvotienten* af $p(Z)$ modulo $d(Z)$, mens polynomiet $r(Z)$ kaldes *resten* af $p(Z)$ modulo $d(Z)$. Polynomiet $d(Z)$ er en faktor i $p(Z)$, hvis og kun hvis denne rest er nulpolynomiet. Derfor kan divisionsalgoritmen også benyttes til at afgøre, om et givet polynomium overhovedet kan divideres op i $p(Z)$.

For at bestemme kvotienten og resten begynder vi med følgende skematiske procedure:

$$
\begin{array}{r|c|l}
d(Z) & p(Z) & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

Er vi heldige, har vi $\deg p(Z) < \deg d(Z)$. I så fald kan vi stoppe divisionsalgoritmen allerede her og returnere værdierne $q(Z) = 0$ og $r(Z) = p(Z)$. Hvis ikke, så starter vi den lange division og bestemmer et simpelt multiplum af $d(Z)$ med samme grad og ledende koefficient som $p(Z)$. Lad os betegne graden af $d(Z)$ ved m, den ledende koefficient i $d(Z)$ ved d_m og den ledende koefficient i $p(Z)$ ved b. Så har polynomiet $bd_m^{-1}Z^{\deg p(Z)-m} \cdot d(Z)$ nøjagtig samme grad og ledende koefficient som $p(Z)$. Derfor opdaterer vi den skematiske procedure som følger:

$$\begin{array}{r|l|l}
d(Z) & p(Z) & bd_m{}^{-1}Z^{\deg p(Z)-m} \\
\hline
 & bd_m{}^{-1}Z^{\deg p(Z)-m} \cdot d(Z) & \\
\cline{2-2}
 & p(Z) - bd_m{}^{-1}Z^{\deg p(Z)-m} \cdot d(Z) &
\end{array}$$

Bemærk, at graden af polynomiet $p(Z) - bd_m{}^{-1}Z^{\deg p(Z)-m} \cdot d(Z)$ er skarpt mindre end $\deg p(Z)$, da de ledende koefficienter i $p(Z)$ og $bd_m{}^{-1}Z^{\deg p(Z)-m} \cdot d(Z)$ er ens og derfor annullerer hinanden, når forskellen mellem de to polynomier udregnes. Skulle det ske, at graden af det resulterende polynomium $p(Z) - bd_m{}^{-1}Z^{\deg p(Z)-m} \cdot d(Z)$ er skarpt mindre end graden af $d(Z)$, er vi færdige og kan returnere som svar polynomierne $p(Z) - bd_m{}^{-1}Z^{\deg p(Z)-m} \cdot d(Z)$ for $r(Z)$ og $bd_m{}^{-1}Z^{\deg p(Z)-m} \cdot d(Z)$ for $q(Z)$. Hvis ikke, så fortsætter vi til næste linje.

Antag nu, at vi har udført proceduren et par gange og er nået frem til følgende:

$$\begin{array}{r|c|l}
d(Z) & p(Z) & q^*(Z) \\
\hline
 & \ddots & \\
\cline{2-2}
 & r^*(Z) &
\end{array}$$

Hvis $\deg r^*(Z) < \deg d(Z)$, så er vi færdige og kan returnere $q^*(Z)$ og $r^*(Z)$ som kvotienten og resten, vi leder efter. Ellers udfører vi et trin mere i den lange division og finder et simpelt multiplum af $d(Z)$, der har samme grad og ledende koefficient som $r^*(Z)$. Meget lig det første trin i den lange division, hvor vi nu betegner den ledende koefficient i $r^*(Z)$ ved b, får vi, at polynomiet $bd_m^{-1}Z^{\deg r^*(Z)-m} \cdot d(Z)$ har nøjagtig samme grad og ledende koefficient som $r^*(Z)$. Derfor opdaterer vi den skematiske procedure som følger:

$$\begin{array}{r|l|l}
d(Z) & p(Z) & q^*(Z) + bd_m{}^{-1}Z^{\deg r^*(Z)-m} \\
\hline
 & \ddots & \\
\cline{2-2}
 & r^*(Z) & \\
 & bd_m{}^{-1}Z^{\deg r^*(Z)-m} \cdot d(Z) & \\
\cline{2-2}
 & r^*(Z) - bd_m{}^{-1}Z^{\deg r^*(Z)-m} \cdot d(Z) &
\end{array}$$

Da graden af polynomiet i bunden af skemaet falder for hvert trin i iterationen, vil vi efter et endeligt antal trin nå situationen:

$$\begin{array}{r|c|l}
d(Z) & p(Z) & q(Z) \\
\hline
 & \cdots & \\
\cline{2-2}
 & \ddots & \\
\cline{2-2}
 & r(Z) &
\end{array}$$

Her er $r(Z)$ enten nulpolynomiet, eller $\deg r(Z) < \deg d(Z)$. Kvotienten og resten er dermed de polynomier $q(Z)$ og $r(Z)$, der ses i skemaet. Lad os opstille denne algoritme i pseudo-kode. For at angive, at algoritmen skal fortsætte, lige så længe $\deg r^*(Z) \geq \deg d(Z)$, benytter vi en såkaldt while-løkke i pseudo-koden.

Algoritme 7 til udførelse af lang division i $\mathbb{C}[Z]$

Input: $p(Z) \in \mathbb{C}[Z], d(Z) \in \mathbb{C}[Z] \setminus \{0\}$.
$m \leftarrow \deg d(Z)$
$d_m \leftarrow$ ledende koefficient i $d(Z)$
$q^*(Z) \leftarrow 0$ og $r^*(Z) \leftarrow p(Z)$
while $\deg r^*(Z) \geq m$ **do**
  $b \leftarrow$ ledende koefficient i $r^*(Z)$
  $q^*(Z) \leftarrow q^*(Z) + bd_m^{-1}Z^{\deg r(Z)-m}$
  $r^*(Z) \leftarrow r^*(Z) - bd_m^{-1}Z^{\deg r^*(Z)-m} \cdot d(Z)$
return $q^*(Z), r^*(Z)$

4.6 Rødder, multipliciteter og faktoriseringer

En overraskende og smuk sætning siger, at ethvert polynomium $p(Z) \in \mathbb{C}[Z]$ af grad mindst 1 har en rod i $\mathbb{C}$. Dette resultat kaldes normalt *algebraens fundamentalsætning*. Lad os her formulere denne sætning, så vi kan referere til den fremover.

Sætning 4.6.1 Algebraens fundamentalsætning

Lad $p(Z) \in \mathbb{C}[Z]$ være et polynomium af grad mindst én. Da har $p(Z)$ en rod $\lambda \in \mathbb{C}$.

Vi vil ikke bevise denne sætning, da beviset er temmelig indviklet. Vi har dog set, at sætningen er sand for polynomier af anden grad i Sætning 4.4.2. Bemærk, at et polynomium ikke nødvendigvis har en reel rod. Som eksempel har polynomiet $Z^2 + 1$ ikke en reel rod men derimod et par af (ikke-reelle) komplekse rødder, nemlig i og $-i$.

Det kan være svært eller direkte umuligt at finde et nyttigt, nøjagtigt udtryk for et givet polynomiums rødder, hvor man ofte må nøjes med en numerisk tilnærmelse af rødderne. Man kan dog på forhånd vide noget om antallet af rødderne, som et polynomium kan have. Vi vil nu se, at hvis et polynomium har graden n, så har det n rødder, hvis vi tæller rødderne på en bestemt måde. Med divisionsalgoritmen som værktøj påbegynder vi her vores undersøgelse af rødder i et polynomium.

Lemma 4.6.2

Lad $p(Z) \in \mathbb{C}[Z]$ være et polynomium af grad $n \geq 1$, og lad $\lambda \in \mathbb{C}$ være et komplekst tal. Tallet λ er en rod i $p(Z)$, hvis og kun hvis $Z - \lambda$ er en faktor i $p(Z)$.

Bevis. Hvis $Z - \lambda$ er en faktor i $p(Z)$, så findes der et polynomium $q(Z) \in \mathbb{C}[Z]$, således at $p(Z) = (Z - \lambda) \cdot q(Z)$. Derfor gælder der, at $p(\lambda) = 0 \cdot q(\lambda) = 0$. Dette viser, at λ er en rod i $p(Z)$, hvis $Z - \lambda$ er en faktor i $p(Z)$.

Antag nu, at λ er en rod i $p(Z)$. Ved hjælp af divisionsalgoritmen kan vi bestemme polynomierne $q(Z)$ og $r(Z)$, således at

$$p(Z) = (Z - \lambda) \cdot q(z) + r(Z), \tag{4.5}$$

hvor enten $r(Z)$ er nulpolynomiet, eller $\deg(r(Z)) < \deg(Z - \lambda) = 1$. Da enten $r(Z) = 0$, eller $\deg(r(Z)) < 1$, ser vi, at $r(Z)$ faktisk er en konstant $r \in \mathbb{C}$. Ved at sætte $Z = \lambda$ i Ligning (4.5) får vi, at $p(\lambda) = r + 0 = r$. Dermed har vi vist, at $p(Z) = (Z - \lambda) \cdot q(Z) + p(\lambda)$. Hvis λ er en rod i $p(Z)$ (det vil sige, $p(\lambda) = 0$), får vi derfor, at $Z - \lambda$ er en faktor i $p(Z)$. $\square$

Ved hjælp af dette lemma kan vi definere multipliciteten af en rod.

Definition 4.6.1

Lad λ være en rod i et polynomium $p(Z)$. Multipliciteten af roden defineres som det største naturlige tal $m \in \mathbb{N}$, således at $(Z - \lambda)^m$ er en faktor i $p(Z)$. λ siges at være rod i $p(Z)$ med *multiplicitet m*.

Bemærk, at Lemma 4.6.2 medfører, at enhver rod i et polynomium har multiplicitet mindst 1. En rod med multiplicitet to kaldes typisk en dobbeltrod.

Eksempel 4.6.1

Afgør, om -3 er en rod i følgende polynomier. Bestem i bekræftende fald dens multiplicitet.

- $p_1(Z) = 2Z^2 + 3Z - 9$.
- $p_2(Z) = Z^2 + 3Z + 1$.
- $p_3(Z) = Z^3 + 3Z^2 - 9Z - 27$.
- $p_4(Z) = (2Z^2 + 3Z - 9) \cdot (Z^3 + 3Z^2 - 9Z - 27) = 2Z^5 + 9Z^4 - 18Z^3 - 108Z^2 + 243$.

Svar:

(a) Vi har $p_1(-3) = 18 - 9 - 9 = 0$. Derfor er -3 en rod i polynomiet $2Z^2 + 3Z - 9$. Vi har i Eksempel 4.5.1 set, at $2Z^2 + 3Z - 9 = (Z + 3) \cdot (2Z - 3)$. Dette betyder, at multipliciteten af roden -3 er lig med 1. Vi kan også se, at faktoren $2Z - 3$ giver anledning til endnu en rod i $p_1(Z)$, nemlig roden $3/2$. Denne rod har også multiplicitet 1.

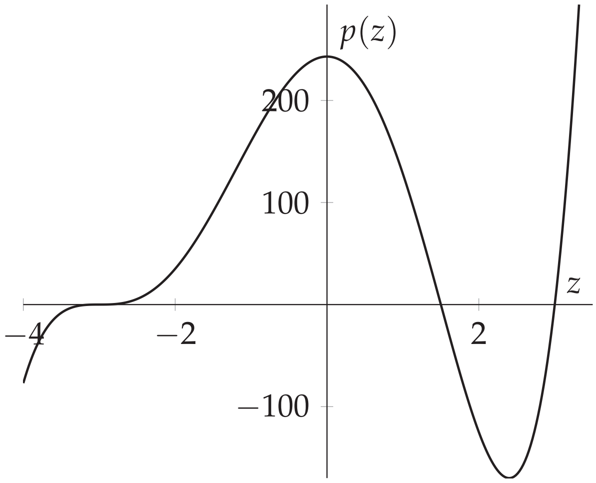
(b) Vi har $p_2(-3) = 1$. Derfor er -3 ikke en rod i $p_2(Z)$.

(c) Denne gang har vi $p_3(-3) = 0$, så -3 er en rod i $p_3(Z)$. Ved brug af divisionsalgoritmen får vi:

$$\begin{array}{r|r|l} Z+3 & Z^3+3Z^2-9Z-27 & Z^2-9 \\ & Z^3+3Z^2 & \\ \hline & -9Z-27 & \\ & -9Z-27 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

Derfor gælder der, at $Z^3 + 3Z^2 - 9Z - 27 = (Z+3) \cdot (Z^2 - 9)$. Tallet -3 er også en rod i polynomiet $Z^2 - 9$, så multipliciteten af roden -3 er mindst 2. Faktisk gælder der, at $Z^2 - 9 = (Z+3) \cdot (Z-3)$, så $Z^3 + 3Z^2 - 9Z - 27 = (Z+3) \cdot (Z^2 - 9) = (Z+3)^2 \cdot (Z-3)$, hvilket betyder, at roden -3 i $p_3(Z)$ har multiplicitet 2. Vi viste også, at 3 er en rod i $p_3(Z)$, og at denne rod har multiplicitet 1.

(d) Vi har $p_4(Z) = p_1(Z)p_3(Z)$. Fra første og tredje punkt i dette eksempel får vi, at $p_4(Z) = (Z+3)^3 \cdot (2Z-3) \cdot (Z-3)$. Dette betyder, at roden -3 har multiplicitet 3. Vi ser også, at tallene $3/2$ og 3 er rødder i $p_4(Z)$, begge med multiplicitet 1. Grafen for den reelle polynomiumsfunktion, som $p_4(Z)$ giver anledning til, ses i Figur 4.3.



Figur 4.3: Grafen for polynomiumsfunktionen $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, hvor $p(z) = 2z^5 + 9z^4 - 18z^3 - 108z^2 + 243$.

Ovenstående eksempel illustrerer, at der er en én-til-én-korrespondance mellem faktorer af grad én i et polynomium og rødderne i et polynomium. Algebraens fundamentalsætning (Sætning 4.6.1) siger, at ethvert polynomium af grad mindst 1 har en rod. Dette har følgende konsekvens:

Sætning 4.6.3

Lad $p(Z) = a_n Z^n + a_{n-1} Z^{n-1} + \cdots + a_1 Z + a_0$ være et polynomium af grad $n > 0$. Da eksisterer der $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$, således at

$$p(Z) = a_n \cdot (Z - \lambda_1) \cdots (Z - \lambda_n).$$

Bevis. Ifølge algebraens fundamentalsætning eksisterer der en rod $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ i polynomiet $p(Z)$. Ved hjælp af Lemma 4.6.2 kan vi skrive $p(Z) = (Z - \lambda_1)q_1(Z)$ for et vist polynomium $q_1(Z)$. Bemærk, at $\deg(q_1(Z)) = \deg(p(Z)) - 1$. Hvis $q_1(Z)$ er en konstant, er vi færdige. Ellers kan vi anvende algebraens fundamentalsætning på polynomiet $q_1(Z)$ og bestemme en rod $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ i $q_1(Z)$. Igen ved hjælp af Lemma 4.6.2 kan vi skrive $q_1(Z) = (Z - \lambda_2) \cdot q_2(Z)$. Dette medfører, at $p(Z) = (Z - \lambda_1) \cdot (Z - \lambda_2) \cdot q_2(Z)$. Ved at fortsætte på denne måde kan vi skrive $p(Z)$ som et produkt af polynomier af grad én på formen $Z - \lambda$ gange en konstant c. Da den ledende koefficient i $p(Z)$ er a_n, er denne konstant c lig med a_n. □

Eksempel 4.6.2

Som et eksempel genbesøger vi polynomiet $p_4(Z) = 2Z^5 + 9Z^4 - 18Z^3 - 108Z^2 + 243$ fra Eksempel 4.6.1. Vi ønsker at omskrive dette polynomium som i Sætning 4.6.3. Vi har allerede set, at $p_4(Z) = (Z+3)^3 \cdot (2Z - 3) \cdot (Z - 3)$. Ved at faktorisere 2 ud fra faktoren $2Z - 3$ får vi:

$$p_4(Z) = 2 \cdot (Z+3)^3 \cdot (Z - 3/2) \cdot (Z - 3) = 2 \cdot (Z+3) \cdot (Z+3) \cdot (Z+3) \cdot (Z - 3/2) \cdot (Z - 3).$$

I notationen fra Sætning 4.6.3 ser vi, at $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = -3$, $\lambda_4 = 3/2$, og $\lambda_5 = 3$. Dette illustrerer endnu en gang, at multipliciteterne af rødderne -3, $3/2$ og 3 er henholdsvis 3, 1 og 1. Bemærk, at summen af alle multipliciteter er lig med 5, hvilket er graden af $p_4(Z)$.

Faktisk gælder det altid, at summen af alle multipliciteter af rødderne i et polynomium er lig med dets grad. I ord kan man derfor omformulere Sætning 4.6.3 som følger: et polynomium af grad $n \geq 1$ har nøjagtigt n rødder, hvis rødderne tælles med multipliciteter. For polynomier i $\mathbb{R}[Z]$ har Sætning 4.6.3 følgende konsekvens:

Korollar 4.6.4

Ethvert polynomium $p(Z) \in \mathbb{R}[Z]$ af grad mindst én, kan skrives som produktet af polynomier af grad én og grad to fra $\mathbb{R}[Z]$.

Bevis. Ifølge Sætning 4.6.3 kan ethvert polynomium $p(Z)$, der ikke er nulpolynomiet, skrives som produktet af den ledende koefficient i $p(Z)$ og faktorer af grad én på formen $Z - \lambda$. Tallet $\lambda \in \mathbb{C}$ er en rod i polynomiet $p(Z)$. Hvis vi anvender dette på et polynomium $p(Z)$ med reelle koefficienter, ser vi, at mens den ledende koefficient er et reelt tal, behøver roden λ ikke at være et reelt tal. Men enhver reel rod λ giver anledning til en faktor af grad én med reelle koefficienter, nemlig $Z - \lambda$.

Lad nu $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ være en rod i $p(Z)$. Lad os skrive $\lambda = a + bi$ på rektangulær form. Da $\lambda \notin \mathbb{R}$, ved vi, at $b \neq 0$. Lemma 4.3.3 medfører, at tallet $\overline{\lambda} = a - bi$ også er en rod i $p(Z)$. Desuden er $\lambda \neq \overline{\lambda}$, da $b \neq 0$. Derfor er $Z - \lambda$ og $Z - \overline{\lambda}$ to forskellige faktorer i $p(Z)$, hvis vi arbejder i $\mathbb{C}[Z]$. Nu er ideen at multiplicere faktorerne $Z - \lambda$ og $Z - \overline{\lambda}$ sammen, da det viser sig, at $(Z-\lambda)\cdot(Z-\overline{\lambda})$ har reelle koefficienter. Vi får

$$\begin{aligned}(Z-\lambda)\cdot(Z-\overline{\lambda}) &= Z^2-(\lambda+\overline{\lambda})Z+\lambda\overline{\lambda}\\ &= Z^2-(a+bi+a-bi)Z+(a+bi)\cdot(a-bi)\\ &= Z^2-2aZ+(a^2+b^2),\end{aligned}$$

der som forventet er et polynomium af grad to i $\mathbb{R}[Z]$, da dets koefficienter er reelle tal. På denne måde kan vi omdanne faktoriseringen af $p(Z)$ i $\mathbb{C}[Z]$ fra Sætning 4.6.3 til en faktorisering af $p(Z)$ i $\mathbb{R}[Z]$ ved brug af faktorer af første og anden grad med reelle koefficienter. □

Eksempel 4.6.3

Skriv følgende polynomier som et produkt af polynomier af grad én og grad to med reelle koefficienter.

(a) $p_1(Z)=Z^3-Z^2+Z-1$

(b) $p_2(Z)=Z^4+4$

Svar:

(a) Tallet 1 er en rod i $p_1(Z)$, da $p(1)=0$. Ved hjælp af divisionsalgoritmen kan man vise, at $p_1(Z)=(Z-1)\cdot(Z^2+1)$. Polynomiet Z^2+1 har ingen reelle rødder og kan derfor ikke faktoriseres yderligere indenfor de reelle tal (indenfor de komplekse tal kan man godt: $Z^2+1=(Z+i)\cdot(Z-i)$). Den ønskede faktorisering er derfor:

$$Z^3-Z^2+Z-1=(Z-1)\cdot(Z^2+1).$$

(b) Ved brug af teorien i Afsnit 4.4 kan vi bestemme alle rødder i polynomiet Z^4+4 til at være $1+i, 1-i, -1+i$ og $-1-i$. Derfor har vi, at

$$Z^4+4=(Z-(1+i))\cdot(Z-(1-i))\cdot(Z-(-1+i))\cdot(Z-(-1-i)).$$

Som i beviset for Korollar 4.6.4 kan vi gange par af komplekst konjugerede faktorer sammen for at slippe af med de komplekse koefficienter. Derefter har vi, at

$$(Z-(1+i))\cdot(Z-(1-i))=Z^2-2Z+2$$

og

$$(Z-(-1+i))\cdot(Z-(-1-i))=Z^2+2Z+2.$$

Den ønskede faktorisering af Z^4+4 er derfor

$$Z^4+4=(Z^2-2Z+2)\cdot(Z^2+2Z+2).$$