Kapitel 1

Udsagnslogik

1.1 Prolog: Et logisk problem om etiketter og krukker

Matematik handler om at løse problemer, der involverer objekter som mængder, funktioner, tal, afledte, integraler og mange flere. Målet med dette kapitel er at træne og forbedre dine problemløsningsevner generelt ved at forklare dig nogle værktøjer fra matematisk logik. For at identificere og motivere disse værktøjer betragter vi som et eksempel følgende problemstilling:

Eksempel 1.1.1

Opgave: Der er givet tre krukker. Du kan ikke se, hvad der er i krukkerne, men de er mærket med etiketterne "Æbler", "Begge" og "Pærer". Etiketten "Begge" betyder blot, at krukken indeholder både æbler og pærer. Problemet er nu, at nogen har byttet rundt på etiketterne på en sådan måde, at ingen etiket sidder på den rigtige krukke længere. Med andre ord: Vi ved, at der for hver krukke gælder, at dens etiket er "Æbler" eller "Begge" eller "Pærer". Vi ved også, at alle etiketterne i øjeblikket er forkerte, hvilket betyder, at den venstre krukke har den sande etiket "Begge" eller "Pærer", den midterste krukke har den sande etiket "Æbler" eller "Pærer", mens den højre krukke har den sande etiket "Æbler" eller "Begge".

For at finde ud af, hvor etiketterne hører til, kan du trække stykker af frugt fra hver krukke. Hvor mange gange skulle du trække fra krukkerne for at finde ud af, hvor etiketterne oprindeligt var?

Vi vil løse denne gåde senere, men du er velkommen til at tænke over det allerede nu!

1.2 Kom i gang med udsagnslogik

Pointen i at stille denne gåde om krukkerne og etiketterne er, at vi ved at tænke over den identificerer adskillige nøgleingredienser, der er nyttige generelt, når man arbejder på et

Figur 1.1: En gåde om etiketter og krukker

matematisk problem. Man bruger ord som "og", "eller", "ikke" og "hvis ... så", når man arbejder på opgaver af denne art. Lad os derfor introducere noget notation fra det, der kendes som *udsagnslogik*. Dette er et emne, der omhandler kombinationer af korte påstande, der kan være enten sande eller falske. Et eksempel på en sådan kort påstand er: etiketten på krukke nummer et er "Æbler". Vi vil kalde en sådan påstand for et logisk *udsagn*. Her er tre eksempler mere på sådanne udsagn: $x = 10$, $1 < y$, $a \neq p$.

Vi benytter typisk variabler som P, Q og tilsvarende til at betegne logiske udsagn. Et logisk udsagn P kan være sandt eller falsk, hvilket mere formelt formuleres således: P kan tage værdien T (for det engelske 'true') eller værdien F (for 'falsk' eller det engelske 'false'). Det er også meget normalt at anvende tallet 1 i stedet for T samt 0 i stedet for F, men i denne tekst vil vi holde os til T og F.

Af og til kan et udsagn opdeles i mindre, enklere udsagn. For eksempel består udsagnet

$$x = 10 \quad \text{og} \quad 1 < y,$$

af de to enklere udsagn $x = 10$, $1 < y$ kombineret med ordet 'og'. I udsagnslogikken skriver man

$$x = 10 \quad \wedge \quad 1 < y.$$

For at forbedre læsbarheden kan man placere parenteser omkring dele af udtrykket og for eksempel skrive:

$$(x = 10) \wedge (1 < y).$$

For at være helt præcise i betydningen af $\wedge$ vil vi gøre det utvetydeligt, hvornår et udsagn af formen $P \wedge Q$ er sandt. Vi vil gøre dette i følgende definition:

Definition 1.2.1

Lad P og Q være to logiske udsagn. Da er $P \wedge Q$, som udtales "P og Q", sandt, netop når både P er sandt, og Q er sandt. På tabelform:

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
F	T	F
T	F	F
F	F	F

Tabellen i denne definition kaldes en *sandhedstabel* for det logiske udsagn $P \wedge Q$. Lad os forklare i flere detaljer, hvordan en sådan sandhedstabel fungerer. De to variabler P og Q kan begge være sande eller falske uafhængigt af hinanden. Med andre ord: P og Q kan antage værdien T eller værdien F uafhængigt. Derfor er der i alt fire tilfælde at overveje for:

1) P og Q antager begge værdien T,

2) P antager værdien F, og Q antager værdien T,

3) P antager værdien T, og Q antager værdien F,

4) P og Q antager begge værdien F.

For hver af disse fire muligheder angiver sandhedstabellen for $P \wedge Q$, hvilken værdi $P \wedge Q$ antager. Hvis P for eksempel antager værdien T, og Q antager værdien F, kan vi aflæse i den tredje række i sandhedstabellen, at $P \wedge Q$ antager værdien F. Dette er grunden til, at sandhedstabellen for $P \wedge Q$ har fire rækker. Hver række angiver, hvilken værdi $P \wedge Q$ antager, hvis P og Q hver især antager specifikke værdier.

Mere komplicerede logiske udsagn har også en sandhedstabel. Her er et eksempel:

Eksempel 1.2.1

Lad P, Q, R være tre logiske udsagn. Betragt nu det logiske udsagn $P \wedge (Q \wedge R)$. Vi har sat parenteser omkring $Q \wedge R$ for at tydeliggøre, at vi betragter P kombineret med $Q \wedge R$ ved hjælp af $\wedge$. Det logiske udsagn $(P \wedge Q) \wedge R$ ser umiddelbart lignende ud men er strengt taget ikke det samme som $P \wedge (Q \wedge R)$!

For at bestemme, hvornår $P \wedge (Q \wedge R)$ er sandt, og hvornår det er falsk, benytter vi Definition 1.2.1 og bestemmer dets sandhedstabel. Da vi nu har tre variabler, vil sandhedstabellen indeholde otte rækker: en række for hver mulig kombination af værdier antaget af P, Q og R. Derfor starter tabellen således:

P	Q	R
T	T	T
F	T	T
T	F	T
F	F	T
T	T	F
F	T	F
T	F	F
F	F	F

Da $P \wedge (Q \wedge R)$ består af P og $Q \wedge R$, er det praktisk først at tilføje en kolonne til $Q \wedge R$. For at udfylde de værdier, $Q \wedge R$ antager i hver af de otte rækker, benytter vi Definition 1.2.1. At de logiske udsagn i Definition 1.2.1 blev kaldt P og Q, er uden betydning, og definitionen kan også anvendes på de logiske udsagn Q og R. For eksempel antager både Q og R værdien T i de første to rækker, hvilket ifølge Definition 1.2.1 betyder, at også $Q \wedge R$ antager værdien T dér. I den tredje og fjerde række antager Q værdien F og R værdien T. Derfor antager $Q \wedge R$ værdien F i disse rækker. Vi fortsætter på denne måde og får:

P	Q	R	$Q \wedge R$
T	T	T	T
F	T	T	T
T	F	T	F
F	F	T	F
T	T	F	F
F	T	F	F
T	F	F	F
F	F	F	F

Herefter tilføjer vi en kolonne til $P \wedge (Q \wedge R)$ og bestemmer sandhedsværdierne, som udsagnet antager for hver af de otte rækker. Antag for eksempel, at (P, Q, R) antager værdierne $(\mathrm{F}, \mathrm{T}, \mathrm{T})$, svarende til værdierne i sandhedstabellens anden række. Så ser vi i den kolonne, vi netop har bestemt, at $Q \wedge R$ antager værdien T. Anvendes Definition 1.2.1 på de logiske udsagn P og $Q \wedge R$, ser vi nu, at $P \wedge (Q \wedge R)$ antager værdien F. Vi fortsætter på denne måde og bestemmer hele kolonnen for $P \wedge (Q \wedge R)$, hvilket fuldfører sandhedstabellen:

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \wedge (Q \wedge R)$
T	T	T	T	T
F	T	T	T	F
T	F	T	F	F
F	F	T	F	F
T	T	F	F	F
F	T	F	F	F
T	F	F	F	F
F	F	F	F	F

Vi kan opfatte $\wedge$ som en logisk operator: givet to logiske udsagn P og Q producerer den et nyt logisk udsagn $P \wedge Q$, uanset hvor komplicerede P og Q måtte være. I dette lys kaldes $\wedge$

typisk *konjunktion*, og $P \wedge Q$ kaldes konjunktionen af P og Q.

Lad os introducere nogle flere logiske operatorer. I Eksempel 1.1.1 ved vi, at alle etiketter er forkerte til at starte med. Derfor har den første krukke fra venstre ikke etiketten “Æbler”. Den må derfor have den sande etiket “Begge” eller “Pærer”. Dette formaliseres i den næste definition.

Definition 1.2.2

Lad P og Q være to logiske udsagn. Da er $P \vee Q$, som udtales “P eller Q”, defineret ved følgende sandhedstabel:

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
F	T	T
T	F	T
F	F	F

Operatoren $\vee$ kaldes *disjunktion* og $P \vee Q$ disjunktionen af P og Q. En tredje logisk operator er negationen af et logisk udsagn. Vi har allerede berørt dette i Eksempel 1.1.1, hvor vi fik givet, at etiketterne er forkert placeret. For eksempel er den sande etiket på den midterste krukke derfor ikke “Begge”. Et udsagn som $x \neq 0$ er simpelthen negationen af udsagnet $x = 0$. Lad os definere negationsoperatoren formelt.

Definition 1.2.3

Lad P være et logisk udsagn. Da er $\neg P$, som udtales “ikke P”, defineret ved følgende sandhedstabel:

P	$\neg P$
T	F
F	T

Som operator kaldes $\neg$ for *negation*, og $\neg P$ kaldes derfor også negationen af P. Vi har nu rigeligt med ingredienser til at kunne opstille adskillige logiske udsagn. Lad os overveje et eksempel.

Eksempel 1.2.2

Betragt det logiske udsagn $P \vee (Q \wedge \neg P)$. Vi vil bestemme dets sandhedstabel. Da vi kun har to variable P og Q, vil denne sandhedstabel indeholde fire rækker. I $P \vee (Q \wedge \neg P)$ indgår det simplere logiske udsagn $Q \wedge \neg P$, som igen indeholder det logiske udsagn $\neg P$. For at kunne bestemme sandhedstabellen for $P \vee (Q \wedge \neg P)$ giver det derfor mening at tilføje en kolonne til $\neg P$ og en til $Q \wedge \neg P$, hvorved vi gradvist arbejder os hen imod at have bestemt sandhedsværdierne for hele det logiske udsagn $P \vee (Q \wedge \neg P)$. Således bliver resultatet følgende:

P	Q	$\neg P$	$Q \wedge \neg P$	$P \vee (Q \wedge \neg P)$
T	T	F	F	T
F	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	F	T	F	F

Lad os sammenligne vores fundne sandhedstabel med sandhedstabellen for $P \vee Q$ i Definition 1.2.2. For givne sandhedsværdier af P og Q er sandhedsværdierne af $P \vee (Q \wedge \neg P)$ og $P \vee Q$ altid de samme! Med andre ord: hvis vi kun betragter de tre kolonner i vores fundne sandhedstabel, der svarer til P, Q og $P \vee (Q \wedge \neg P)$, får vi præcis samme tabel som sandhedstabellen i Definition 1.2.2. To logiske udsagn, der ser forskellige ud, kan åbenbart have samme sandhedstabel.

1.3 Logisk konsekvens og ækvivalens

De logiske operatorer, vi har introduceret indtil videre, $\neg$, $\wedge$ og $\vee$, gør det muligt at skrive adskillige logiske udsagn på en præcis måde. Pointen med logik er dog at gøre argumenter og ræsonnementer mere præcise. Vi vil gerne være i stand til at sige noget i retning af, hvis P er sandt, kan vi konkludere, at også Q er sandt. For eksempel, hvis $x > 0$, er også $x > -1$. Dette kan formaliseres ved brug af det logiske symbol $\Rightarrow$, kaldet en *implikation*, med skrivemåden $P \Rightarrow Q$ ved følgende definition:

Definition 1.3.1

Det logiske udsagn $P \Rightarrow Q$ defineres ved følgende sandhedstabel:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
T	T	T
F	T	T
T	F	F
F	F	T

I almindeligt sprog udtaler man typisk $P \Rightarrow Q$ som "P medfører Q" eller "hvis P, så Q". Det kan blive nødvendigt at skrive det logiske udsagn $P \Rightarrow Q$ som $Q \Leftarrow P$.

Vi vil betegne to særlige typer logiske udsagn ved **T** og **F**. Det logiske udsagn **T** repræsenterer en påstand, der altid er sand, som for eksempel påstanden $5 = 5$. Et sådant logisk udsagn kaldes en *tautologi*. I modsætning hertil repræsenterer det logiske udsagn **F** en påstand, der altid er falsk, som for eksempel $5 \neq 5$. Dette kaldes en *modstrid*. Tænker vi i implikationer, betyder påstanden, at $P \Rightarrow Q$ altid er sandt for givne logiske udsagn P og Q, faktisk, at $P \Rightarrow Q$ er en tautologi. Hvis $P \Rightarrow Q$ er en tautologi, viser sandhedstabellen for implikationen i Definition 1.3.1, at hvis P er sandt, er også Q sandt.

Hvis $P \Rightarrow Q$ er en tautologi, siges Q at være en *logisk konsekvens* af P, alternativt at Q medføres af P, på engelsk 'Q is implied by P', hvilket forklarer brugen af begrebet implikation for symbolet $\Rightarrow$. Lad os se på et eksempel på logisk konsekvens.

Eksempel 1.3.1

Lad P og Q være logiske udsagn. Vi påstår nu, at det logiske udsagn $P \lor Q$ er en logisk konsekvens af P. Vi kan vise påstanden ved at vise, at det logiske udsagn $P \Rightarrow (P \lor Q)$ altid er sandt, med andre ord at $P \Rightarrow (P \lor Q)$ er en tautologi. Vi bestemmer sandhedstabellen for $P \Rightarrow (P \lor Q)$ ved på sædvanlig vis først at opskrive alle kombinationer af sandhedsværdier for P og Q:

P	Q
T	T
F	T
T	F
F	F

Dernæst tilføjer vi en kolonne til $P \lor Q$ for at gøre det nemt for os selv, da det forekommer i det mere komplicerede udsagn $P \Rightarrow (P \lor Q)$, som vi skal arbejde os hen imod. Ved brug af Definition 1.2.2 skriver vi:

P	Q	$P \lor Q$
T	T	T
F	T	T
T	F	T
F	F	F

Nu tilføjes en kolonne til $P \Rightarrow (P \lor Q)$, og ved brug af Definition 1.3.1 bestemmes dens sandhedsværdier ud fra værdierne af P og $P \lor Q$. Resultatet er den sandhedstabel, vi ønsker at bestemme:

P	Q	$P \lor Q$	$P \Rightarrow (P \lor Q)$
T	T	T	T
F	T	T	T
T	F	T	T
F	F	F	T

Da kolonnen tilhørende udtrykket $P \Rightarrow (P \lor Q)$ kun indeholder T'er, kan vi konkludere, at $P \Rightarrow (P \lor Q)$ er en tautologi. Vi har hermed vist, at det ganske rigtigt gælder, at P altid medfører $P \lor Q$, med andre ord at $P \lor Q$ er en logisk konsekvens af P.

Stærkere end en implikation er det, der er kendt som en *biimplikation*, betegnet ved $\Leftrightarrow$ og defineret som følger:

Definition 1.3.2

Det logiske udsagn $P \Leftrightarrow Q$, som udtales "P hvis og kun hvis Q", er defineret ved følgende sandhedstabel:

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
T	T	T
F	T	F
T	F	F
F	F	T

Sætningen "P hvis og kun hvis Q" for det logiske udsagn $P \Leftrightarrow Q$ kan opdeles i to dele, nemlig "P hvis Q" og "P kun hvis Q". Den første del, "P hvis Q", fortæller blot, at $P \Leftarrow Q$, mens "P kun hvis Q" kan koges ned til udsagnet $P \Rightarrow Q$. Dette forklarer begrebet biimplikation for symbolet $\Leftrightarrow$: to implikationer er kombineret i ét symbol. Senere i Sætning 1.3.4, Ligning (1.22) kommer vi til at se en mere formel måde at udtrykke en biimplikation på som to implikationer.

Eksempel 1.3.2

I Eksempel 1.2.2 så vi, at sandhedstabellen for $P \vee Q$ er identisk med den for $P \vee (Q \wedge \neg P)$. Hvad betyder dette for sandhedstabellen for det logiske udsagn $(P \vee Q) \Leftrightarrow (P \vee (Q \wedge \neg P))$? Lad os udvide tabellen i Definition 1.2.2 med resultatet fra Eksempel 1.2.2:

P	Q	$P \vee Q$	$P \vee (Q \wedge \neg P)$
T	T	T	T
F	T	T	T
T	F	T	T
F	F	F	F

En kolonne til det logiske udsagn $(P \vee Q) \Leftrightarrow (P \vee (Q \wedge \neg P))$ tilføjes tabellen, og ved brug af Definition 1.3.2 udfyldes kolonnen til følgende resultat:

P	Q	$P \vee Q$	$P \vee (Q \wedge \neg P)$	$(P \vee Q) \Leftrightarrow (P \vee (Q \wedge \neg P))$
T	T	T	T	T
F	T	T	T	T
T	F	T	T	T
F	F	F	F	T

Da den yderste kolonne kun indeholder T'er, kan vi konkludere, at $(P \vee Q) \Leftrightarrow (P \vee (Q \wedge \neg P))$ er en tautologi.

Pointen er nu, at hvis $R \Leftrightarrow S$ er en tautologi for nogle, muligvis komplicerede, logiske udsagn R og S, så har R og S samme sandhedstabel. Med andre ord: hvis R er sandt, så er også S sandt, og omvendt hvis S er sandt, så er også R sandt. Hvis $R \Leftrightarrow S$ er en tautologi, siges de logiske udsagn R og S derfor at være *logisk ækvivalente*. I Eksempel 1.3.2 kan vi konkludere, at de logiske udsagn $P \vee Q$ og $P \vee (Q \wedge \neg P)$ er logisk ækvivalente. Pointen med eksempelet var at vise, at man nogle gange kan omskrive en logisk påstand til en enklere form. Der findes adskillige ganske praktiske tautologier, der kan benyttes til at omskrive logiske udsagn til en enklere form. Vi oplister herunder som en start nogle, der omhandler konjunktion, disjunktion og negation.

Sætning 1.3.1

Lad P, Q og R være logiske udsagn. Da er alle følgende udtryk tautologier.

$$P \wedge P \Leftrightarrow P \tag{1.1}$$

$$P \vee P \Leftrightarrow P \tag{1.2}$$

$$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P \tag{1.3}$$

$$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P \tag{1.4}$$

$$P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R \tag{1.5}$$
$$P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R \tag{1.6}$$
$$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \tag{1.7}$$
$$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \tag{1.8}$$

Bevis. Vi kan bevise, at de nævnte logiske udsagn er tautologier, ved at bestemme deres sandhedstabeller. Det ville fylde temmelig mange sider at gøre for dem alle, så lad os blot bevise én af dem her, nemlig Ligning (1.5). Vi ønsker dermed at vise, at $P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$ er en tautologi. I Eksempel 1.2.1 bestemte vi sandhedstabellen for $P \wedge (Q \wedge R)$, så vi undlader at gentage det her. Vi skal her blot bestemme sandhedstabellen for $(P \wedge Q) \wedge R$, hvilket kan gøres ligesom for $P \wedge (Q \wedge R)$ i Eksempel 1.2.1. Derefter vil vi kunne bestemme sandhedstabellen for $P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$ ved hjælp af Definition 1.3.2. Resultatet bliver følgende:

P	Q	R	$P \wedge (Q \wedge R)$	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \wedge R$	$P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$
T	T	T	T	T	T	T
F	T	T	F	F	F	T
T	F	T	F	F	F	T
F	F	T	F	F	F	T
T	T	F	F	T	F	T
F	T	F	F	F	F	T
T	F	F	F	F	F	T
F	F	F	F	F	F	T

Vi ser, at det logiske udsagn $P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$ kun antager sandhedsværdien T, uanset hvilke værdier P, Q og R antager. Derfor kan vi konkludere, at $P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$ er en tautologi.

Alle de andre påstande i sætningen kan vises på samme vis, hvilket vi undlader at gøre her. Læseren opfordres til selv at bevise mindst én påstand mere. □

I ord siger Ligning (1.6), at når man bestemmer disjunktionen af tre logiske udsagn, betyder placeringen af parenteserne ikke noget. Derfor vil man typisk helt udelade parenteserne og skrive $P \vee Q \vee R$. Tilsvarende siger Ligning (1.5), at også for konjunktionen af tre logiske udsagn kan parenteserne placeres frit, hvorfor man også typisk skriver $P \wedge Q \wedge R$ uden nogen risiko for tvetydighed. Men dette ændrer sig, hvis både konjunktion og disjunktion forekommer i det samme udtryk. Så betyder parenteserne noget. Lad os se på et eksempel.

Eksempel 1.3.3

Betragt de logiske udsagn $(P \wedge Q) \vee R$ og $P \wedge (Q \vee R)$. Vi hævder, at disse ikke er logisk ækvivalente. Dette kan vises ved bestemmelse af deres sandhedstabeller. Men for at vise, at to logiske udsagn ikke er logisk ækvivalente, kan vi faktisk nøjes med blot at finde nogle eksempelværdier for P, Q og R, for hvilke $(P \wedge Q) \vee R$ og $P \wedge (Q \vee R)$ ikke begge er sande og ikke begge er falske. Lad os for eksempel undersøge, hvornår $(P \wedge Q) \vee R$ er falsk. Dette sker, netop når $P \wedge Q$ er falsk, og R er falsk. Derfor er $(P \wedge Q) \vee R$ falsk, netop hvis P og Q ikke begge er sande, og R er falsk. Samtidig er $P \wedge (Q \vee R)$ falsk, når P er falsk. Hvis (P, Q, R) antager værdierne (F, T, T), så er $(P \wedge Q) \vee R$ derfor sandt, men $P \wedge (Q \vee R)$ er falsk. Dette betyder, at der i sandhedstabellen for de to udtryk er en række, der ser således ud:

P	Q	R	$\dots$	$(P \wedge Q) \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$
$\vdots$					
F	T	T	$\dots$	T	F
$\vdots$					

Dette er nok til at konkludere, at de logiske udsagn $(P \wedge Q) \vee R$ og $P \wedge (Q \vee R)$ ikke er logisk ækvivalente. Hvis de var det, ville det logiske udsagn $(P \wedge Q) \vee R \Leftrightarrow P \wedge (Q \vee R)$ være en tautologi og derfor kun tage værdien T, men vi har nu set, at dens sandhedstabel vil indeholde følgende række:

P	Q	R	$\dots$	$(P \wedge Q) \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$(P \wedge Q) \vee R \Leftrightarrow P \wedge (Q \vee R)$
$\vdots$						
F	T	T	$\dots$	T	F	F
$\vdots$						

Vi har derfor, at det logiske udsagn $(P \wedge Q) \vee R \Leftrightarrow P \wedge (Q \vee R)$ ikke er en tautologi, og derfor, at de logiske udsagn $(P \wedge Q) \vee R$ og $P \wedge (Q \vee R)$ ikke er logisk ækvivalente.

Der findes flere nyttige tautologier til arbejdet med logiske udsagn. Ud over konjunktionen $\wedge$ og disjunktionen $\vee$ involverer de følgende også negationen $\neg$. Vi overlader beviserne til læseren.

Sætning 1.3.2

Lad P, Q og R være logiske udsagn. Da er alle følgende udtryk tautologier.

$$P \vee \neg P \Leftrightarrow \mathbf{T} \tag{1.9}$$
$$P \wedge \neg P \Leftrightarrow \mathbf{F} \tag{1.10}$$
$$P \Leftrightarrow \neg(\neg P) \tag{1.11}$$
$$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \tag{1.12}$$
$$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \tag{1.13}$$
$$\neg \mathbf{T} \Leftrightarrow \mathbf{F} \tag{1.14}$$
$$\neg \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{T} \tag{1.15}$$

Identiteterne (1.12) og (1.13) kaldes *De Morgans love*. Der findes også et par tautologier, der beskriver, hvordan $\wedge$ og $\vee$ opfører sig i kombinationer med tautologier og modstridigheder. Igen overlader vi beviserne for disse til læseren.

Sætning 1.3.3

Lad P, Q og R være logiske udsagn. Da er alle følgende udtryk tautologier.

$$
\begin{aligned}
P \vee \mathbf{F} &\Leftrightarrow P && (1.16)\\
P \wedge \mathbf{T} &\Leftrightarrow P && (1.17)\\
P \wedge \mathbf{F} &\Leftrightarrow \mathbf{F} && (1.18)\\
P \vee \mathbf{T} &\Leftrightarrow \mathbf{T} && (1.19)
\end{aligned}
$$

Listerne over tautologier i Sætningerne 1.3.1, 1.3.2 og 1.3.3 kan ofte hjælpe med omskrivning af logiske udsagn til en logisk ækvivalent form. Lad os se på et eksempel.

Eksempel 1.3.4

Betragt som i Eksemplerne 1.2.2 og 1.3.2 det logiske udsagn $P \vee (Q \wedge \neg P)$. Vi har allerede set, at det er logisk ækvivalent med $P \vee Q$. Lad os bevise det ved hjælp af Sætning 1.3.1 som et alternativ til at bestemme sandhedstabeller. Først og fremmest ser vi ved hjælp af Ligning (1.8), at

$$P \vee (Q \wedge \neg P) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg P).$$

Ved hjælp af Ligning (1.9) konkluderer vi, at

$$P \vee (Q \wedge \neg P) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge \mathbf{T},$$

hvilket ved brug af Ligning (1.17) kan reduceres til

$$P \vee (Q \wedge \neg P) \Leftrightarrow P \vee Q.$$

Med andre ord, ved hjælp af Sætning 1.3.1 kan man bevise logiske ækvivalenser uden at skulle bestemme sandhedstabeller. Beviset af sætningen selv kræver selvfølgelig, at der bestemmes adskillige sandhedstabeller, men det behøver kun at blive gjort én gang. I matematikken er pointen med en sætning generelt, at den indeholder et eller flere nyttige resultater med et bevis. Når beviset er givet, kan man benytte resultatet i sætningen hvor nødvendigt uden at skulle bevise sætningen igen.

Tautologierne i Sætning 1.3.1 involverer kun negation, konjunktion og disjunktion. Her er yderligere tre, der er særdeles nyttige, som involverer implikation og biimplikation.

Sætning 1.3.4

Lad P og Q være logiske udsagn. Da er alle følgende udtryk tautologier.

$$
\begin{aligned}
(P \Rightarrow Q) &\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) && (1.20)\\
(P \Rightarrow Q) &\Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P) && (1.21)\\
(P \Leftrightarrow Q) &\Leftrightarrow (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P) && (1.22)\\
P &\Leftrightarrow (\neg P \Rightarrow \mathbf{F}) && (1.23)
\end{aligned}
$$

Bevis. Ligesom med Sætning 1.3.1 kan disse påstande bevises ved bestemmelse af sandhedstabeller for hver af dem. Dette gør vi her for den andennævnte påstand, og beviser for de resterende overlades til læseren:

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$	$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$
T	T	T	F	F	T	T
F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T	T

Da den højre kolonne kun indeholder T'er, konkluderer vi, at $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$ er en tautologi. □

Ligning (1.20) betyder, at en implikation i princippet kan udtrykkes ved hjælp af negation og disjunktion. Ligning (1.21) kaldes *kontraposition*. Dette betyder, at hvis man vil bevise, at Q er en logisk konsekvens af P, er det nok at vise, at $\neg P$ er en logisk konsekvens af $\neg Q$. Lad os se et lille eksempel på kontraposition.

Eksempel 1.3.5

Overvej påstanden, at der for vilkårlige reelle tal x og y gælder, at

$$(x \cdot y = 0) \Rightarrow ((x = 0) \vee (y = 0)).$$

Denne påstand er sand, og for en gangs skyld er målet ikke at bevise den. Vi ønsker blot at undersøge, hvad kontrapositionen af en sådan påstand er.

Først og fremmest er den givne påstand et logisk udsagn af formen $P \Rightarrow Q$, hvor P er ligningen $x \cdot y = 0$ og Q udsagnet $(x = 0) \vee (y = 0)$. Med ord kan implikationen $P \Rightarrow Q$ formuleres således: hvis ligningen $x \cdot y = 0$ gælder for nogle reelle tal x og y, så er $x = 0$ eller $y = 0$.

Hvad er kontrapositionen af dette? Ligning (1.21) fortæller, at kontrapositionen er $\neg Q \Rightarrow \neg P$. Oversat til vores eksempel bliver den søgte kontraposition dermed

$$\neg((x = 0) \vee (y = 0)) \Rightarrow \neg(x \cdot y = 0).$$

Dette kan dog reduceres en smule. Først og fremmest kan $\neg(x \cdot y = 0)$ omskrives til $x \cdot y \neq 0$. Desuden kan vi ved hjælp af Ligning (1.12), en af De Morgans love, omskrive $\neg((x = 0) \vee (y = 0))$ til $\neg(x = 0) \wedge \neg(y = 0)$, hvilket igen kan skrives som $(x \neq 0) \wedge (y \neq 0)$. Derfor kan kontrapositionen af

$$(x \cdot y = 0) \Rightarrow (x = 0) \vee (y = 0)$$

skrives som

$$((x \neq 0) \wedge (y \neq 0)) \Rightarrow (x \cdot y \neq 0).$$

Sagt i ord: kontrapositionen af udsagnet "hvis $x \cdot y = 0$, så er $x = 0$ eller $y = 0$" er simpelthen "hvis $x \neq 0$ og $y \neq 0$, så er $x \cdot y \neq 0$".

Denne sidstnævnte påstand er en sand påstand, da den er logisk ækvivalent med den sande påstand, vi startede med i dette eksempel.

Ligning (1.22) siger, at to logiske udsagn er logisk ækvivalente, netop hvis de er logiske konsekvenser af hinanden. Ganske ofte er det lettere at vise, at $P \Rightarrow Q$ og $Q \Rightarrow P$ er sande hver for sig, end at vise direkte, at $P \Leftrightarrow Q$ er sand. Også Ligning 1.23 benyttes af og til til at bevise logiske udsagn: i stedet for at vise, at P er sandt, antager man, at P er falsk, og prøver derefter at opnå en modstrid. Hvis man opnår en modstrid, kan man konkludere, at $\neg P \Rightarrow \mathbf{F}$ er sand. Ligning (1.23) viser så, at P dermed også er sandt. Denne metode kaldes et modstridsbevis.

I senere kapitler vil vi regelmæssigt benytte Ligningerne (1.21), (1.22) og (1.23), når forskellige matematiske udsagn undersøges. I næste afsnit vil vi desuden vise anvendelser af logik i matematikken.

1.4 Anvendelsen af logik i matematikken

Logik kan hjælpe, når matematiske problemstillinger skal løses, og når det matematiske ræsonnement skal tydeliggøres. I dette afsnit giver vi en række eksempler på dette.

Eksempel 1.4.1

Spørgsmål: Bestem alle reelle tal x, således at $-x \leq 0 \leq x-1$.

Svar: $-x \leq 0 \leq x-1$ er faktisk en forenklet udgave af det logiske udsagn

$$-x \leq 0 \quad \wedge \quad 0 \leq x-1.$$

Den første ulighed er logisk ækvivalent med uligheden $x \geq 0$, mens den anden er ækvivalent med $x \geq 1$. Derfor er et reelt tal x en løsning, hvis og kun hvis

$$x \geq 0 \quad \wedge \quad x \geq 1.$$

Svaret er derfor alle reelle tal x, således at $x \geq 1$.

Eksempel 1.4.2

Spørgsmål: Bestem alle reelle tal x, således at $2|x| = 2x+1$. Her betegner $|x|$ absolutværdien af x.

Svar: Hvis $x < 0$, så er $|x| = -x$, mens hvis $x \geq 0$, så er $|x| = x$. Derfor er det praktisk at overveje tilfældene $x < 0$ og $x \geq 0$ hver for sig. Mere formelt har vi følgende sekvens af logisk ækvivalente udsagn:

$$
\begin{array}{lcl}
2|x| = 2x+1 & & \\
\Leftrightarrow & & \\
2|x| = 2x+1 & \wedge & (x<0 \quad \vee \quad x \geq 0) \\
\Leftrightarrow & & \\
(2|x| = 2x+1 \quad \wedge \quad x<0) & \vee & (2|x| = 2x+1 \quad \wedge \quad x \geq 0) \\
\Leftrightarrow & & \\
(-2x = 2x+1 \quad \wedge \quad x<0) & \vee & (2x = 2x+1 \quad \wedge \quad x \geq 0) \\
\Leftrightarrow & & \\
(-4x = 1 \quad \wedge \quad x<0) & \vee & (0 = 1 \quad \wedge \quad x \geq 0) \\
\Leftrightarrow & & \\
(x = -1/4 \quad \wedge \quad x<0) & \vee & (\mathbf{F} \quad \wedge \quad x \geq 0) \\
\Leftrightarrow & & \\
x = -1/4 \quad \vee \quad \mathbf{F} & & \\
\Leftrightarrow & & \\
x = -1/4 & &
\end{array}
$$

Den eneste løsning til ligningen $2|x| = 2x + 1$ er derfor $x = -1/4$.

Eksempel 1.4.3

Spørgsmål: Bestem alle ikke-negative reelle tal, således at $\sqrt{x} = -x$.

Observation: Det er fristende at opløfte begge sider i anden potens, hvilket ville resultere i $x = x^2$, og derefter konkludere, at $x = 0$ og $x = 1$ er løsningerne til ligningen $\sqrt{x} = -x$. $x = 0$ er ganske rigtigt en løsning, men $x = 1$ er faktisk ikke, da $\sqrt{1} \neq -1$. Hvad gik galt?

Svar: Ræsonnementet ovenfor viser, at hvis x opfylder ligningen $\sqrt{x} = -x$, så er $x = x^2$, hvilket igen medfører, at $x = 0$ eller $x = 1$. Derfor er følgende udsagn helt korrekt:

$$(\sqrt{x} = -x) \Rightarrow (x = 0 \vee x = 1).$$

I den forstand gik intet galt, og enhver løsning til ligningen $\sqrt{x} = -x$ skal ganske rigtigt være enten $x = 0$ eller $x = 1$. Hvad der kan forvirre, er, at dette slet ikke betyder, at $x = 0$ og $x = 1$ begge er løsninger til ligningen $\sqrt{x} = -x$. Dette ville nemlig svare til udsagnet

$$(x = 0 \vee x = 1) \Rightarrow (\sqrt{x} = -x),$$

hvilket ikke er, hvad vi har vist, og faktisk er det ikke sandt. For at løse opgaven, skal vi blot eftertjekke, om de fundne potentielle løsninger $x = 0$ og $x = 1$ virkelig er løsninger. Vi får da, at $x = 0$ er den eneste løsning.

1.5 Epilog: det logiske problem om etiketter og krukker

Lad os vende tilbage til problemet med krukker og etiketter fra første afsnit.

Eksempel 1.5.1

Lad os ved $P_1(A)$ betegne udsagnet, at den venstre krukke har den sande etiket "Æbler". På samme måde kan vi ved $P_1(B)$, henholdsvis $P_1(P)$, betegne udsagnet, at den venstre krukke har den sande etiket "Begge", henholdsvis "Pærer". Vi ved så, at $P_1(B) \vee P_1(P)$ altid er sandt, da den venstre krukke ikke kan have etiketten "Æbler". Ligeledes kan vi for den midterste krukke introducere $P_2(A)$, $P_2(B)$ og $P_2(P)$ som betegnelser for udsagnene, at den midterste krukke har den sande etiket "Æbler", "Begge" eller "Pærer", og konkludere, at $P_2(A) \vee P_2(P)$ er et sandt udsagn. Igen for den højre krukke får vi, at $P_3(A) \vee P_3(B)$ er et sandt udsagn. Vi konkluderer, at

$$(P_1(B) \vee P_1(P)) \wedge (P_2(A) \vee P_2(P)) \wedge (P_3(A) \vee P_3(B)) \tag{1.24}$$

altid er sandt. Ved anvendelse af Ligning (1.7) gentagne gange kan vi omskrive dette til det logisk ækvivalente udsagn

$$\begin{array}{lclc}
(P_1(B) \wedge P_2(A) \wedge P_3(A)) & \vee & (P_1(B) \wedge P_2(A) \wedge P_3(B)) & \vee \\
(P_1(B) \wedge P_2(P) \wedge P_3(A)) & \vee & (P_1(B) \wedge P_2(P) \wedge P_3(B)) & \vee \\
(P_1(P) \wedge P_2(A) \wedge P_3(A)) & \vee & (P_1(P) \wedge P_2(A) \wedge P_3(B)) & \vee \\
(P_1(P) \wedge P_2(P) \wedge P_3(A)) & \vee & (P_1(P) \wedge P_2(P) \wedge P_3(B)). &
\end{array}$$

Dette udsagn er stadig sandt, da det er logisk ækvivalent med udsagnet fra Ligning 1.24. Da vi ved, at hver etiket skal anvendes netop én gang, kan et udsagn som $P_1(B) \wedge P_2(A) \wedge P_3(A)$, hvor den samme etiket optræder to gange, ikke være korrekt, hvilket vil sige, at det er en modstrid. Da disjunktion absorberer modstridigheder, hvilket Ligning (1.16) viser, konkluderer vi derfor, at

$$(P_1(B) \wedge P_2(P) \wedge P_3(A)) \quad \vee \quad (P_1(P) \wedge P_2(A) \wedge P_3(B)) \tag{1.25}$$

nødvendigvis altid er sandt.

Dette viser, at der kun er to mulige korrekte måder at mærke krukkerne på. Dette er ganske nyttig viden, da vi ikke har trukket frugt endnu! Lad os nu undersøge, hvad effekten af at trække fra en krukke er. Hvis vi trækker fra den venstre krukke, lærer vi ikke meget om etiketten på den krukke. Da den sande etiket er "Begge" eller "Pærer", ved vi, hvis vi trækker et æble fra den, at den sande etiket ikke kan være "Pærer", men hvis vi trækker en pære fra den, kunne den sande etiket stadig være "Begge" eller "Pærer". Ligeledes kan et træk fra den højre krukke heller ikke med sikkerhed fastslå krukkens sande etiket. Situationen er anderledes for den midterste krukke. Da den sande etiket på den midterste krukke er "Æbler" eller "Pærer", ved vi, at hvis vi trækker et æble fra den, kan dens sande etiket ikke være "Pærer". I det tilfælde vil etiketten skulle være "Æbler". Ligeledes, hvis vi trækker en pære fra den midterste krukke, er dens sande etiket "Pærer". Vi er dermed kommet frem til følgende løsningsmetode til problemet:

Løsning:

Trin 1: Træk fra den midterste krukke. Da vi ved, at alle etiketter er forkerte, indeholder den midterste krukke, der har etiketten "Begge", enten kun æbler eller kun pærer. Hvis vi trækker et æble fra den midterste krukke, kan vi konkludere, at den korrekte etiket skulle have været "Æbler", mens vi, hvis vi trækker en pære fra den midterste krukke, kan konkludere, at den korrekte etiket skulle have været "Pærer".

Trin 2: Vi ved, at det logiske udsagn i Ligning 1.25 altid er sandt. Dette medfører, at hvis vi i trin 1 fandt den korrekte etiket for den midterste krukke til at være "Æbler", så er $P_1(P) \wedge P_2(A) \wedge P_3(B)$ sandt, mens hvis den korrekte etiket på den midterste krukke blev identificeret som "Pærer" i trin 1, så er $P_1(B) \wedge P_2(P) \wedge P_3(A)$ sandt.

Konklusion: Vi behøver kun at trække én gang! Derefter kan vi placere alle tre etiketter korrekt. Desuden har vi fundet frem til en simpel, trinvis procedure til at bestemme den korrekte mærkning. Dette er et eksempel på, hvad man kalder en algoritme. Vi kan opskrive proceduren som en computer-algoritme som følger:

Algoritme 1 Etiketidentifikator

1: Træk fra krukken mærket "Begge", og betegn resultatet ved R.
2: **if** $R =$ æble **then**
3: Identificér etiketterne på krukkerne som "Pærer","Æbler","Begge",
4: **else**
5: Identificér etiketterne på krukkerne som "Begge","Pærer","Æbler".

Bemærk, at vi i pseudo-kode som her fastholder klassiske engelske betegnelser for kodespecifikke udtryk så som if-then-else-betingelser.

Der findes adskillige gåder af denne type. Her er endnu en. Du er velkommen til at prøve at løse den selv, før du læser løsningen.

Eksempel 1.5.2

En politibetjent undersøger et indbrud og har kunnet indsnævre antallet af mistænkte til tre. Betjenten er helt sikker på, at en af disse tre har begået forbrydelsen, og at gerningsmanden arbejdede alene. Under afhøringerne kommer de tre mistænkte hver især med følgende udtalelser:

Mistænkt1:	"Mistænkt2 gjorde det";
	"Jeg var der ikke";
	"Jeg er uskyldig"
Mistænkt2:	"Mistænkt3 er uskyldig";
	"Alt, hvad Mistænkt1 sagde, er løgn";
	"Jeg gjorde det ikke"
Mistænkt3:	"Jeg gjorde det ikke";
	"Mistænkt1 lyver, hvis han sagde, at han ikke var der";
	"Mistænkt2 lyver, hvis han sagde, at alt, hvad Mistænkt1 sagde, er løgn"

Forvirret går politibetjenten til sin chef, politikommissæren. Politikommissæren siger: "Jeg kender disse mistænkte ret godt, og hver eneste af dem lyver altid mindst én gang i deres udtalelser." Kan du hjælpe politibetjenten med at finde ud af, hvilken mistænkt der er skyldig i indbruddet?

Løsning: Lad os introducere nogle logiske udsagn for at kunne analysere situationen. Først og fremmest er P_1 udsagnet "Mistænkt1 gjorde det", og på samme måde står P_2 for "Mistænkt2 gjorde det" og P_3 for "Mistænkt3 gjorde det". Med denne notation på plads har vi, at

$$P_1 \vee P_2 \vee P_3$$

er sandt, da politibetjenten er helt sikker på, at en af de tre mistænkte begik indbruddet.

Lad os nu analysere udtalelserne fra de mistænkte:

Udtalelse fra Mistænkt1:	
"Mistænkt2 gjorde det";	dette er bare P_2
"Jeg var der ikke";	vi kalder dette R_1
"Jeg er uskyldig";	dette svarer til $\neg P_1$

Lad os tage politikommissærens input med i overvejelserne: alle tre mistænkte har løjet mindst én gang i deres udtalelser. Altså lyver Mistænkt1 om mindst én af sine tre påstande, hvilket betyder, at $\neg P_2 \vee \neg R_1 \vee \neg(\neg P_1)$ er et sandt udsagn. Ved hjælp af Ligning (1.11), konkluderer vi, at også

$$\neg P_2 \vee \neg R_1 \vee P_1$$

er et sandt udsagn.

Udtalelse fra Mistænkt2:	
"Mistænkt3 er uskyldig";	dette er $\neg P_3$
"Alt, hvad Mistænkt1 sagde, er løgn";	dette svarer til $\neg P_2 \wedge \neg R_1 \wedge P_1$
"Jeg gjorde det ikke";	dette er $\neg P_2$

Lad os igen inddrage politikommissærens input. For Mistænkt2 får vi, at $P_3 \vee \neg(\neg P_2 \wedge \neg R_1 \wedge P_1) \vee P_2$ er et sandt udsagn. Man kan reducere dette udtryk ved hjælp af Sætning 1.3.1. Først og fremmest er udsagnet $\neg(\neg P_2 \wedge \neg R_1 \wedge P_1)$ logisk ækvivalent med $\neg(\neg P_2) \vee \neg(\neg R_1) \vee \neg P_1)$, som igen er logisk ækvivalent med $P_2 \vee R_1 \vee \neg P_1$ ifølge Ligning (1.11). Erstattes dette med det oprindelige udsagn, ser vi, at $P_3 \vee (P_2 \vee R_1 \vee \neg P_1) \vee P_2$ er et sandt udsagn. Ved at reducere $P_2 \vee P_2$ til P_2 ved brug af Ligning (1.2) får vi, at også

$$P_3 \vee P_2 \vee R_1 \vee \neg P_1$$

er et sandt udsagn.

Udtalelsen fra Mistænkt3 er lidt indviklet, så før vi samler hans udsagn i en tabel, tager vi et kig på hans to sidstnævnte udsagn. Andennævnte udsagn fra Mistænkt3 er, at "Mistænkt1 lyver, hvis han sagde, at han ikke var der". Med andre ord: "Mistænkt1 var der ikke" $\Rightarrow$ "Mistænkt1 lyver". Men politikommissæren har allerede fortalt os, at udsagnet "Mistænkt1 lyver" altid er sandt. Dette betyder, at implikationen "Mistænkt1 var der ikke " $\Rightarrow$ "Mistænkt1 lyver" er et sandt udsagn. Ligeledes er det tredje udsagn fra Mistænkt3, at "Mistænkt2 lyver, hvis han sagde, at alt, hvad Mistænkt1 sagde, er løgn", sandt. Derfor giver det andet og tredje udsagn fra Mistænkt3 os ikke nogen information, som vi ikke allerede vidste.

Udtalelse fra Mistænkt3:

"Jeg gjorde det ikke"; dette er $\neg P_3$
"Mistænkt1 lyver, hvis han sagde, at han ikke var der";
"Mistænkt2 lyver, hvis han sagde, at alt, hvad Mistænkt1 sagde, er løgn;

Lad os for tredje gang overveje politikommissærens input. Først og fremmest medfører dette input, at andet og tredje udsagn fra Mistænkt3 er sande, da vi ved, at Mistænkt1 og Mistænkt2 lyver. Da Mistænkt3 ifølge samme input fra politikommissæren løj, konkluderer vi, at $\neg P_3$ må være en løgn. Med andre ord, P_3 må være sandt.

Samler vi det hele, har vi nu bestemt, at følgende alle er sande: $P_1 \vee P_2 \vee P_3$, $\neg P_2 \vee \neg R_1 \vee P_1$, $P_3 \vee P_2 \vee R_1 \vee \neg P_1$, P_3. Det faktum, at P_3 er sandt, medfører straks, at den eneste mulighed er, at Mistænkt3 har begået indbruddet, og at Mistænkt1 og Mistænkt2 som følge heraf er uskyldige. Men vi bør stadig kontrollere, om alle de andre udsagn i dette tilfælde rent faktisk er sande. Hvis ikke, ville dette betyde, at der ikke findes nogen løsning, og at politibetjenten eller politikommissæren tager fejl. Først og fremmest, hvis P_3 antager værdien T, så vil $P_1 \vee P_2 \vee P_3$ og $P_3 \vee P_2 \vee R_1 \vee \neg P_1$ være sande jævnfør definitionen af disjunktion. Dette efterlader $\neg P_2 \vee \neg R_1 \vee P_1$. Da Mistænkt2 er uskyldig, antager P_2 værdien F, og som en konsekvens heraf antager $\neg P_2$ værdien T. Derfor er $\neg P_2 \vee \neg R_1 \vee P_1$ et sandt udsagn. Dette betyder, at der ikke er nogen modstrid. Politiet bør anholde Mistænkt3!